الجذور التربيعية والتكعيبية

اقبال محمد بطيحة



الإهداء

إلى أبي وأمي العزيزين ....

إلى زوجتي الغالية...

وفلذات كبدي محمد ورغد...

وإلى إخوتي الأعزاء...

وإلى صديقيّ ن لذيـ ال ان قـ قـ يـ ي ورائـ ي فـ ل كـ فـ وقـ مـ...



المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين، وبعد؛ لطالما أثار انتباهي أثناء تدريسي لمبحث الرياضيات للصفوف الدنيا موضوعا الجذور التربيعية والتكعيبية، فعندما كنت أتناول الدروس التي تحتويهما كنت غير مقتنع تماما ولا حتى الطلاب بالطرق المعروضة في تلك الدروس، وذلك للأخطاء الكبيرة التي تنتج من جراء استخدام تلك الطرق في إيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية إذا ما قورنت بالنتائج التي نتحصّل عليها فيما إذا استخدمنا الآلة الحاسبة في إيجادها.

ولأن مستويات الطلاب في الصفوف الدنيا لا تسمح لهم بالخوض في أساليب ونظريات – تفوق مقدرتهم بكثير– يمكن من خلالها تقريب الجذور التربيعية والتكعيبية، كنظرية بلزانو (Belzano's Theorem)، وطريقة نيوتن– رافسون (Newton-Raphson's Method)، ومتسلسلة ذات الحدين (Binomial Series) وطريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method)، والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials) وغيرها من الطرق الأخرى؛ لما تتطلبه أي منها إلى معرفتهم بمفاهيم أكبر من سنّهم، كالاشتقاق والمتسلسلات والتقريبات العديدة إلى غيرها من الأمور الأخرى، فإنني أخذت الأمر على محمل الجد وأشغلني كثيرا إلى أن توصلت

إلى طريقة جديدة أسميتها "طريقة الحصر" (Restriction Method) والتي سوف أستعرضها من خلال هذه الدراسة، حيث أنه ومن خلال استخدام هذه الطريقة يمكن إيجاد قيم تقريبية للجذور التربيعية وقيم تقريبية للجذور التكعيبية بصورة بسيطة، تنتج قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية لتلك الجذور، هذا بالإضافة إلى تقديمي مسبقا لعدة علاقات يمكن من خلال التطبيق عليها إيجاد كافة المربعات والمكعبات الكاملة قبل الخوض في الجذور التربيعية والتكعيبية للأعداد.

أما مادة هذا الكتاب، فقد حاولت أن تكون بسيطة ومتكاملة وتؤدي إلى الغرض الذي كتبت لأجله، فالفصل الأول فيه يتناول مفهوم المربع الكامل ومفهوم الجذر التربيعي وكيفية اكتشاف المربعات الكاملة، والفصل الثاني يتناول بعض الطرق المستخدمة لتقريب الجذور التربيعية، وقد ارتأيت تقديم ستة طرق في هذا الفصل ألا وهي على الترتيب:

- **الطريقة التقليدية المستخدمة في المناهج المدرسية.**
- **طريقة بلزانو (Belzano's Theorem).**
- **طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method).**
- **متسلسلة ذات الحدين (Binomial Series).**
- **طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation).**
- **التقريب باستخدام كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials).**

أما الفصل الثالث من هذا الكتاب فيستعرض الطريقة التي تقدمها هذه الدراسة ألا وهي طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التربيعية، حيث أنني أوردت في نهاية هذا الفصل مقارنة بسيطة للقيم التقريبية

لبعض الجذور التربيعية المتحصلة من استخدام أغلب الطرق المستعرضة في الفصل الثاني، والطريقة التي تطرحها هذه الدراسة طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التربيعية.

وعلى غرار ذلك، فإن الفصل الرابع يتناول مفهوم المكعب الكامل ومفهوم الجذر التكعيبي وكيفية اكتشاف المكعبات الكاملة، والفصل الخامس يعود ويتناول الطرق الستة المستعرضة في الفصل الثاني وذلك لتقريب الجذور التكعيبية للأعداد، أما الفصل السادس والأخير فيقدم طريقة الحصر (Restriction Method) مرة أخرى ولكنها تُقَدم هنا لتقريب الجذور التكعيبية، عارضا في هذا الفصل مقارنة بسيطة للقيم التقريبية لبعض الجذور التكعيبية المتحصلة من استخدام بعض الطرق المستعرضة في الفصل الخامس والطريقة التي تطرحها هذه الدراسة طريقة الحصر (Restriction Method).

وأحب أن أنوه هنا بأنه يمكن تدريس هذه الطريقة أعني طريقة الحصر (Restriction Method) والتي تستخدم في تقريب الجذور التربيعية والتكعيبية، والعلاقات الرياضية التي يمكننا باستخدامها اكتشاف المربعات والمكعبات الكاملة لأحد الصفين السابع أو الثامن الأساسيين.

وأخيرا أود أن أشكر كل من ساهم على إنجاز هذه الدراسة، وعلى وجه الخصوص أشكر أخي الدكتور رضوان بطيحة والدكتور رمزي بدارنة الذي قام بقراءة مسودة هذا العمل وأبدى ملاحظات قيمة تم أخذها بعين الاعتبار، كما أوجه الشكر والعرفان إلى أبي وأمي وزوجتي وأولادي وأخوتي الذين سمحوا لي بوقتهم لإنجاز هذا العمل.

المؤلف

ملخص الدراسة

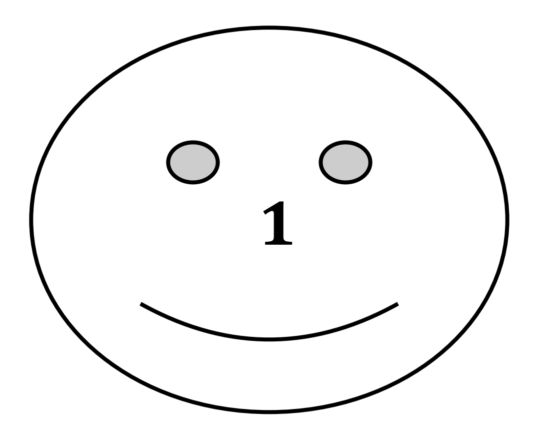
تهدف هذه الدراسة إلى تقديم طريقة جديدة في علم الرياضيات تساعد الباحثين والمتعلمين على إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي وقيمة تقريبية للجذر التكعيبي بطريقة مختصرة وبسيطة وقريبة جدا من قيمة الجذر التربيعي والجذر التكعيبي لذلك العدد إذا ما استخدمنا الآلة الحاسبة، كما وتقدم هذه الدراسة أيضا عدة علاقات رياضية يمكن من خلال التطبيق عليها اكتشاف كافة المربعات والمكعبات الكاملة للأعداد الطبيعية.

وقد اعتمدت طريقة الحصر (Restriction Method) التي تطرحها هذه الدراسة في اشتقاقها وفي تقريب الجذور التربيعية والتكعيبية من خلالها على أسلوب حصر العدد المطلوب إيجاد جذره التربيعي أو التكعيبي بين مربعين كاملين أو بين مكعبين كاملين على الترتيب، ومن ثم التطبيق على خطوات الطريقة للوصول إلى قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية لجذر ذلك العدد سواء أكان تربيعيا أو تكعيبيا.

كما وقد اعتمدتُ أيضا في اشتقاق هذه الطريقة على اعتبار أن الوسط الحسابي لناتجي الجذرين التربيعيين للمربعين الكاملين هو تقريب أولي للجذر التربيعي للعدد المطلوب، وعلى اعتبار أن الوسط الحسابي لناتجي الجذرين التكعيبيين للمكعبين الكاملين هو تقريب أولي أيضا للجذر التكعيبي للعدد المطلوب.

ومن الجدير بالذكر هنا، أن القيمة الناتجة من جراء التطبيق على هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية، وذلك أن الخطأ فيها يعد قليل جدا.

وسأتطرق من خلال هذه الدراسة إلى تقديم بعض الطرق الأخرى المستخدمة في تقريب الجذور التربيعية والتكعيبية، كالطريقة التقليدية التي تتبعها المناهج المدرسية، ونظرية بلزانو (**Belzano's Theorem**)، وطريقو نيوتن–رافسون (**Newton-Raphson's Method**)، ومتسلسلة ذات الحدين (**Binomial Series**)، وطريقة التقريب الخطي (**Linear Approximation Method**)، والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور (**Taylor Polynomials**)، مقارنا الطرق الخمسة الأخيرة بالطريقة التي تعرضها هذه الدراسة وهي طرقة الحصر (**Restriction Method**)، وذلك من خلال إيراد العديد من الأمثلة التي تتطلب تقريبات للجذور التربيعية والتكعيبية، عارضا النتائج والأخطاء المتحصّلة من استخدامها جميعا.



المربع الكامل

&

جذره التربيعي

مقدمة

تحتل عملية إيجاد الجذور التربيعية للأعداد النسبية أهمية كبيرة في علم الرياضيات، كما أن لها تطبيقاتها الواسعة في حياتنا العملية، ولقد آثرت أن أتطرق في بداية هذه الدراسة إلى مفهومي المربع الكامل والجذر التربيعي للعدد كانطلاقة لها.

1.1 مربع العدد (المربع الكامل)

يطلق على حاصل ضرب العدد في نفسه مربع العدد، لذا فالعدد 64 **مثلا هو مربع العدد** 8 **لأن** $64 = 8 \times 8$ **وبالمثل فإن العدد** 100 **هو مربع للعدد** 10 **لأن** $100 = 10 \times 10$**، وهكذا يمكننا القول بأن:**

1 , 4 , 9 ,16 ,25 ,36 , 49, 64 , 81,100, …

تسمى جميعها مربعات كاملة.

1.2 الجذر التربيعي للمربع الكامل

يعرف الجذر التربيعي للعدد على أنه العدد الذي إذا ضرب بنفسه يكون ناتج الضرب العدد الأصلي، فمثلا نقول بأن الجذر التربيعي للعدد 36 **يساوي** 6 **ونكتب ذلك على الصورة**

$$\sqrt{36} = 6$$

حيث تستخدم الإشارة $\sqrt{\ }$ لتدل على أن المطلوب هو إيجاد الجذر التربيعي للعدد المكتوب تحت الإشارة.

لذا يمكننا القول بأن:

$\sqrt{49} = 7$ ، $\sqrt{81} = 9$ ، $\sqrt{225} = 15$ ، **وهكذا** ...

وتتلخص خطوات إيجاد الجذر التربيعي لمربع كامل بما يلي:

- **نحلل العدد إلى عوامله الأولية.**
- **نأخذ عاملا واحدا من كل زوج من العوامل المتساوية.**
- **نجد حاصل ضرب العوامل التي أخذناها في الخطوة الثانية.**

مثال(1.1): **أوجد قيمة** $\sqrt{11025}$

الحل:

- **نحلل أولا العدد** 11025 **إلى عوامله بطريقة القسمة التحليلية كما في الشكل المجاور.**

11025	5
2205	5
441	3
147	3
49	7
7	7

(5, 5) → 5

(3, 3) → 3

(7, 7) → 7

- **نأخذ عاملا واحدا من كل زوج من العوامل المتساوية، ثم نجد حاصل ضربها.**

$$\sqrt{11025} = 5 \times 3 \times 7 = 105$$

ولا بد من التنويه هنا إلى أنه يكون المربعان الكاملان متتاليين إذا كانا مربعين لعددين طبيعيين متتاليين، فالعددان 16 , 9 **مربعان كاملان لأنهما مربعان للعددين** 3 , 4 **على الترتيب.**

1.3 اكتشاف المربعات الكاملة

يمكن الحصول على أي مربع كامل إذا أعطي المربع الكامل الذي قبله باستخدام القاعدة التالية:

$$b = a + 2\sqrt{a} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث أن:

a : **المربع الكامل الأول.**

b : **المربع الكامل الذي يلي الأول.**

فمثلا للحصول على المربع الكامل الذي يلي العدد 81 **فإنه يمكننا التطبيق على العلاقة** (1) **فنقول أن:**

$$b = a + 2\sqrt{a} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$b = 81 + 2\sqrt{81} + 1 = 100$$

وبذلك فإن المربع الكامل الذي يلي المربع الكامل 81 **هو** 100، **حيث أن:**
$\sqrt{100} = 10$

وللحصول على المربع الكامل الذي يلي العدد 729 **فإنه يمكننا التطبيق أيضا على العلاقة** (1) **لنقول أن:**

$$b = a + 2\sqrt{a} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$b = 729 + 2\sqrt{729} + 1 = 784$$

وبذلك فإن المربع الكامل الذي يلي المربع الكامل 729 **هو** 784، **حيث أن:** $\sqrt{784} = 28$

ويظهر الجدول (1.1) **استخدام العلاقة رقم** (1) **في إيجاد المربعات الكامل (بشرط أن يكون المربع الكامل الذي يأتي قبل المربع الكامل المطلوب إيجاده معلوم).**

الجدول (1.1)

المربع الكامل المعلوم (a)	تطبيق العلاقة رقم (1)	المربع الكامل الذي يلي الأول (b)
1	$1+2\sqrt{1}+1=$	4
4	$4+2\sqrt{4}+1=$	9
9	$9+2\sqrt{9}+1=$	16
16	$16+2\sqrt{16}+1=$	25
25	$25+2\sqrt{25}+1=$	36
36	$36+2\sqrt{36}+1=$	49
49	$49+2\sqrt{49}+1=$	64
64	$64+2\sqrt{64}+1=$	81
81	$81+2\sqrt{81}+1=$	100
100 : :	$100+2\sqrt{100}+1=$: :	**121** : :

1.4 اكتشاف المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا فردية

إذا قمنا بفرز المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا فردية، فسنحصل على الصف التالي:

1 , 9 , 25 , 49 , 81 , 121 , 169 ,…

وبفرض أن:

a_n : **مربع العدد الأول الذي جذره عدد فردي.**

a_{n+1} : **مربع العدد التالي الذي يلي مربع الأول وجذره فردي.**

فإنه يمكننا القول بأن:

$$a_{n+1} = a_n + 8n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

حيث أنه وباستخدام العلاقة رقم (2) يمكننا الحصول على كافة المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا فردية، كما تبين الأمثلة التالية.

بفرض أن: $a_n = 1$ **، وباستخدام العلاقة رقم (2) التالية:**

$$a_{n+1} = a_n + 8n \qquad ; \; n = 1,2,3,\ldots$$

فإن:

$$a_{1+1} = a_1 + 8(1)$$
$$a_2 = 1 + 8 = 9$$

لذا:

$$a_{2+1} = a_2 + 8(2)$$
$$a_3 = 9 + 16 = 25$$

وكذلك:

$$a_{3+1} = a_3 + 8(3)$$

$$a_4 = 25 \; + 24 = 49$$

أيضا:

$$a_{4+1} = a_4 + 8(4)$$
$$a_5 = 49 \; + 32 = 81$$

وهكذا ......

ومن هنا يمكننا القول بأن الأعداد:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$$

هي مربعات كاملة تمثل جذورها التربيعية أعدادا فردية متتالية.

ويظهر الجدول (1.2)، **استخدام العلاقة** (2) **آنفة الذكر في إيجاد المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا فردية متتالية.**

الجدول (1.2)

n	مربع العدد الأول الذي جذره عدد فردي(a_n)	تطبيق العلاقة رقم (2)	مربع العدد التالي الذي يلي مربع الأول وجذره فردي(a_{n+1})
1	1	1 + 8(1)	9
2	9	9 + 8(2)	25
3	25	25 + 8(3)	49
4	49	49 + 8(4)	81
5	81	81 + 8(5)	121
6	121	121 + 8(6)	169
7	169	169 + 8(7)	225
8	225	225 + 8(8)	289
9	289	289 + 8(9)	361
10	361	361 +8(10)	441
:	:	:	:
:	:	:	:

1.5 اكتشاف المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية

يمكننا فرز المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية كما يلي:

4 , 16 , 36 , 64 , 100 , 144 ,…

وبفرض أن:

b_n : **مربع العدد الأول الذي جذره عدد زوجي.**

b_{n+1} : **مربع العدد التالي الذي يلي مربع الأول وجذره زوجي.**

فإنه يمكننا القول بأن:

$$b_{n+1} = b_n + 4(2n+1) \quad \dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$n = 1,2,3,\dots$$

وباستخدام هذه العلاقة يمكننا الحصول على كافة المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية، كما تبين الأمثلة التالية.

بفرض أن: $b_1 = 4$ ، **وباستخدام العلاقة رقم** (3) **التالية:**

$$b_{n+1} = b_n + 4(2n+1) \quad ; \; n = 1,2,3,\dots$$

فإن:

$$b_{1+1} = b_1 + 4(2(1)+1)$$
$$b_2 = 4 + 12 = 16$$

لذا:

$$b_{2+1} = b_2 + 4(2(2)+1)$$

$$b_3 = 16 + 20 = 36$$

وكذلك:

$$b_{3+1} = b_3 + 4(2(3)+1)$$

$$b_4 = 36 + 28 = 64$$

أيضا:

$$b_{4+1} = b_4 + 4(2(4)+1)$$

$$b_5 = 64 + 36 = 100$$

وهكذا ......

ومن هنا يمكننا القول بأن الأعداد $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...$ **هي مربعات كاملة تمثل جذورها التربيعية أعدادا زوجية متتالية.**

ويظهر الجدول (1.3)**، استخدام العلاقة** (3) **آنفة الذكر في إيجاد المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية متتالية.**

الجدول (1.3)

n	مربـــع العـــدد الأول الـــــذي جـــذره عـــدد زوجي (b_n)	تطبيق العلاقة رقم (3)	مربع العدد التالي الذي يلي مربع الأول وجذره زوجي (b_{n+1})
1	4	4+4(2(1) + 1) =	16
2	16	16+4(2(2) +1) =	36
3	36	36+4(2(3) +1) =	64
4	64	64+4(2(4) +1) =	100
5	100	100+4(2(5)+1) =	144
6	144	144+4(2(6)+1) =	196
7	196	196+4(2(7)+1) =	256
8	256	256+4(2(8)+1) =	324
9	324	324+4(2(9)+1) =	400
10	400	400+4(2(10)+1)=	484
:	:	:	:
:	:	:	:

كما وبإمكاننا الحصول على كافة المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية وذلك من خلال استخدام العلاقة التالية:

$$b_n = 4s_n \text{ .... } (4)$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

حيث:

b_n : **مربع العدد الذي جذره يمثل عددا زوجيا.**

s_n : **مربع أي عدد.**

فمثلا:

$$b_1 = 4s_1 = 4(1) = 4$$
$$b_2 = 4s_2 = 4(4) = 16$$
$$b_3 = 4s_3 = 4(9) = 36$$
$$b_4 = 4s_4 = 4(16) = 64$$
$$b_5 = 4s_5 = 4(25) = 100$$

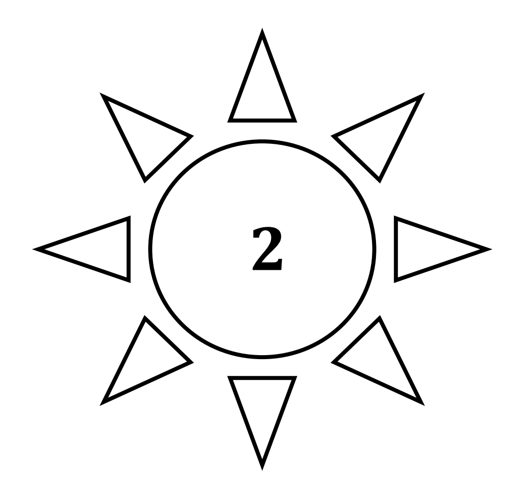
وهكذا...

ويظهر الجدول (1.4)**، استخدام العلاقة رقم** (4) **في إيجاد المربعات الكاملة التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية متتالية.**

الجدول (1.4)

n	مربع العدد (S_n)	تطبيق العلاقة رقم (4)	مربع العدد الذي جذره التربيعي يمثل عددا زوجيا (b_n)
1	1	4(1) =	4
2	4	4(4) =	16
3	9	4(9) =	36
4	16	4(16) =	64
5	25	4(25) =	100
6	36	4(36) =	144
7	49	4(49) =	196
8	64	4(64) =	256
9	81	4(81) =	324
10	100	4(100) =	400
:	:	:	:
:	:	:	:

يتبين لنا مما سبق أنه بإمكاننا اكتشاف كافة المربعات الكاملة وذلك من خلال استخدام العلاقة رقم (1)، كما ومن خلال استخدام العلاقة رقم (2) يمكننا اكتشاف مربعات الأعداد التي جذورها التربيعية تمثل أعدادا فردية، وأخيرا فإنه وباستخدام العلاقتين (4)، (3) يمكننا اكتشاف مربعات الأعداد التي جدورها التربيعية تمثل أعدادا زوجية.



تقريب الجذور التربيعية باستخدام بعض الطرق

مقدمة

يمكن تعريف الأعداد التي تمثل مربعات غير كاملة على أنها أعداد لا يكون ناتج جذورها التربيعية أعدادا طبيعية، فمثلا:

$$2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 8 , 10 , 11 , 12 ,\ldots$$

هي أعداد لا تمثل مربعات كاملة.

وبإمكاننا اتباع عدة طرق لحساب ناتج جذور الأعداد التي لا تمثل مربعات كاملة، وسأتطرق في هذا الفصل إلى ستة طرق فقط وهي على الترتيب:

- **الطريقة التقليدية المتبعة في المناهج المدرسية.**
- **طريقة بلزانو (Belzano's Theorem).**
- **طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method).**
- **متسلسلة ذات الحدين (Binomial Series).**
- **طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method).**
- **التقريب باستخدام كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials).**

وفيما يلي عرضا موجزا للطرق الستة المشار إليها سابقا:

2.1 الطريقة التقليدية

لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{x}$ حيث x عدد حقيقي موجب، فإننا نعمل على حصر العدد x بين مربعين كاملين مثل b^2 a^2 , حيث أن:

$$b^2 > x > a^2$$
$$\Rightarrow b > \sqrt{x} > a$$

لذا:

$$\sqrt{x} \quad \frac{a+b}{2} \approx$$ **كتقريب أولي**

ومن ثم نقارن العدد x بكل من العددين b^2 a^2 , من حيث القرب، لنضع في نهاية الأمر عدة تقريبات تعتمد على مدى قرب العدد x من العدد b^2 أو من العدد a^2 .

مثال(2.1): **قدر ناتج** $\sqrt{19}$.

الحل:

$$25 > 19 > 16$$
$$5 > \sqrt{19} > 4$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{19} \approx 4.5$$

لكن العدد 19 **أقرب إلى العدد** 16 **منه إلى العدد** 25، **لذلك فإن** $\sqrt{19}$ **تنحصر بين** 4.5 , 4 **بمعنى أن:**

$$4.1 , 4.2 , 4.3 , 4.4$$

كلها قيم تقريبية له.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt{19}$ 4.3589 = **لأقرب أربع منازل عشرية، وبالتالي يمكننا استخلاص الجدول** (2.1) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا عليها في المثال** (2.1) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.1)

مربع القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية
16.81	0.2589	4.1
17.64	0.1589	4.2
18.49	0.0589	4.3
19.36	0.0411	4.4

مثال(2.2): **قدر ناتج** $\sqrt{280}$.

الحل:

$$289 > 280 > 256$$

$$17 > \sqrt{280} > 16$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{280} \approx 16.5$$

لكن العدد 280 **أقرب إلى العدد** 289 **منه إلى العدد** 256 ، **لذلك فإن** $\sqrt{280}$ **تنحصر بين** 17 , 16.5 **بمعنى أن:**

16.6 , 16.7 , 16.8 , 16.9

كلها قيم تقريبية له.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt{280}$ 16.7332 = **لأقرب أربع منازل عشرية، وبالتالي يمكننا استخلاص الجدول** (2.2) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا عليها في المثال** (2.2) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.2)

مربع القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية
275.56	0.1332	16.6
278.89	0.0332	16.7
282.24	0.0668	16.8
285.61	0.1668	16.9

مثال(2.3)**: قدر ناتج** $\sqrt{620}$.

الحل:

$$625 > 620 > 576$$

$$25 > \sqrt{620} > 24$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{620} \approx 24.5$$

لكن العدد 620 **أقرب إلى العدد** 625 **منه إلى العدد** 576 ، **لذلك فإن** $\sqrt{620}$ **ينحصر بين** 25 , 24.5 **بمعنى أن:**

24.6 , 24.7 , 24.8 , 24.9

كلها قيم تقريبية له.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt{620}$ 24.8998 = **لأقرب أربع منازل عشرية، وبالتالي يمكننا استخلاص الجدول** (2.3) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا عليها في المثال** (2.3) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.3)

القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
24.6	0.2998	605.16
24.7	0.1998	610.09
24.8	0.0998	615.04
24.9	0.0002	620.01

ومن هنا، فإننا نجد أن التقريبات الأربعة التي توصلنا إليها من خلال استخدام الطريقة السابقة تكون بعيدة عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي لكل من الأعداد 620 , 280 , 19 في الأمثلة (2.3) ,(2.2)، (2.1) على الترتيب، ذلك أن العمود الثالث من الجدول الذي يلي كل مثال من الأمثلة السابقة يبين بوضوح ذلك البعد من خلال الفروقات الواضحة بين مربع القيمة التقريبية التي توصلنا إليها وبين كل من الأعداد 620 , 280 , 19.

لذا؛ سأقوم بإهمال هذه الطريقة فيما بعد، لما ينتج من خلال استخدامها من أخطاء تعد كبيرة نوعا ما، ونظرا للتشتيت والتشكيك وعدم الثقة بالإجابات المتحصّلة – وخاصة عند الطالب – وعدم ثباته (أعني الطالب) عند إجابة واحدة تكون دقيقة نوعا ما.

2.2 نظرية بلزانو (Belzano's Theorem)

<u>نظرية بلزانو(2.1):</u>

إذا كان f اقترانا متصلا في الفترة $[a,b]$، وكان $f(b)$ ، $f(a)$ مختلفين في الإشارة (أي أن $0 > f(a)\times f(b)$)، فإنه يوجد على الأقل عدد مثل $c \in (a,b)$ بحيث أن $f(c) = 0$.

ويمكن الاستفادة من هذه النظرية في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد c ، وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

- **نضع** $x = \sqrt{c}$

- **نربع الطرفين** $x^2 = c$

$$\rightarrow \quad x^2 - c = 0 \;................ (*)$$

- **نكتب الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ حيث:**

$$f(x) = x^2 - c$$

- **نبحث عن فترة مثل $[a,b]$ تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو بحيث يكون:**

$$f(a) \times f(b) < 0$$

- **نجد التقريب الأول (r_1)، حيث أن:**

$$r_1 = \frac{a+b}{2}$$

ثم نقوم بتكرار الخطوتين الأخيرتين للوصول إلى تقريبات أخرى أكثر دقة، وهكذا ...

وسوف أتوقف أثناء استخدام نظرية بلزانو عند التقريب الثالث على الأكثر فقط عند إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد المطلوب.

مثال(2.4): **باستخدام نظرية بلزانو (Belzano's Theorem)، أوجد التقريب الثالث للعدد** $\sqrt{19}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{19}$

$$x^2 = 19$$

$$\rightarrow \quad x^2 - 19 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) **في الخطوة السابقة؛ هو:**

$$f(x) = x^2 - 19$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (بالتجريب) **نجد أن:**

$$f(4) = -3 < 0$$
$$f(5) = 6 > 0$$

لذا:

$$f(4) \times f(5) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ **متصل على الفترة** $[4,5]$ **لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.**

∴ **تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة** $[4,5]$.

⇦ **يوجد عدد مثل** $c \in (4,5)$ **بحيث أن** $f(c) = 0$ **لذا فإن التقريب الأول** (r_1) **هو:**

$$r_1 \approx \frac{4+5}{2} = 4.5$$

وبما أن:

$$f(4.5) = (4.5)^2 - 19 = 1.25 > 0$$

وأن:

$$f(4) \times f(4.5) < 0$$

لذا فالتقريب الثاني (r_2) **هو:**

$$r_2 \approx \frac{4+4.5}{2} = 4.25$$

وبما أن:

$$f(4.25) = (4.25) \quad -19 = -0.9375 < 0$$

وأن:

$$f(4.25) \times f(4.5) < 0$$

فالتقريب الثالث (r_3) **هو:**

$$r_3 \approx \frac{4.25+4.5}{2} = 4.375$$

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt{19} = 4.3589$ ، **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19، **ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له.**

ويبين الجدول (2.4) **التالي، القيمة المطلقة للخطأ بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (2.4) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt{19}$.

الجدول (2.4)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	4.5	0.1411	20.25
التقريب الثاني r_2	4.25	0.1089	18.0625
التقريب الثالث r_3	4.375	0.0161	19.1406

نلاحظ أن التقريبين الأول والثاني اللذين توصلنا إليهما من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 19**، ذلك أن مربع قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينها وبين العدد** 19**، لكن التقريب الثالث يعد تقريبا جيدا جدا إذا ما قورن بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19 .

مثال(2.5): **باستخدام نظرية بلزانو** (**Belzano's Theorem**)**، أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{280}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{280}$

$$x^2 = 280$$

$$\rightarrow x^2 - 280 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^2 - 280$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (بالتجريب) نجد أن:

$$f(16) = -24 < 0$$
$$f(17) = 9 > 0$$

لذا:

$$f(16) \times f(17) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ **متصل على الفترة** $[16,17]$ **لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.**

$\therefore$ **تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة** $[16,17]$.

⇦ **يوجد عدد مثل** $c \in (16,17)$ **بحيث أن** $f(c) = 0$

لذا فإن التقريب الأول (r_1 **) هو:**

$$r_1 \approx \frac{16+17}{2} = 16.5$$

وبما أن:

$$f(16.5) = (16.5)^2 - 280 = -7.75 < 0$$

وأن:

$$f(16.5) \times f(17) < 0$$

لذا فالتقريب الثاني (r_2) هو:

$$r_2 \approx \frac{16.5 + 17}{2} = 16.75$$

وسأتوقف في هذا المثال عند التقريب الثاني r_2 فقط، وذلك لأن القيمة التقريبية الناتجة منه قريبة جدا من القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{280}$.

وإذا استخدمنا الآلة الحاسبة في إيجاد $\sqrt{280}$ فإننا نجد أن:

$\sqrt{280} = 16.7332$ **، لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280 **أيضا، ويظهر ذلك من خلال التقريب الثاني له.**

ويبين الجدول (2.5)، **القيمة المطلقة للخطأ بين التقريبين الإثنين اللذان توصلنا إليهما في المثال** (2.5) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt{280}$.

الجدول (2.5)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	16.5	0.2332	272.25
التقريب الثاني r_2	16.75	0.0168	280.5625

نلاحظ أن التقريب الأول الذي توصلنا إليه من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 280، **ذلك أن مربع قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد** 280، **لكن التقريب الثاني يعد تقريبا جيدا جدا إذا ما قورن بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280.

مثال(2.6): **باستخدام نظرية بلزانو** (**Belzano's Theorem**)، **أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{620}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{620}$

$$x^2 = 620$$

$$\rightarrow \qquad x^2 - 620 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots.. (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^2 - 620$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (بالتجريب) نجد أن:

$$f(24) = -44 < 0$$

$$f(25) = 5 > 0$$

لذا:

$$f(24) \times f(25) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ **متصل على الفترة** $[24,25]$ **لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.**

$\therefore$ **تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة** $[24,25]$.

⇦ **يوجد عدد مثل** $c \in (24,25)$ **بحيث أن** $f(c) = 0$

لذا فإن التقريب الأول (r_1 **) هو:**

$$r_1 \approx \frac{24+25}{2} = 24.5$$

وبما أن:

$$f(24.5) = (24.5)^2 - 620 = -19.75 < 0$$

وأن:

$$f(24.5) \times f(25) < 0$$

لذا فالتقريب الثاني (r_2) هو:

$$r_2 \approx \frac{24.5 + 25}{2} = 24.75$$

وبما أن:

$$f(24.75) = (24.75)^2 - 620 = -7.4375 < 0$$

وأن:

$$f(24.75) \times f(25) < 0$$

فالتقريب الثالث (r_3) هو:

$$r_3 \approx \frac{24.75 + 25}{2} = 24.875$$

وإذا استخدمنا الآلة الحاسبة في إيجاد $\sqrt{620}$ فإننا نجد أن:

$\sqrt{620} = 24.8998$ ، **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620 **أيضا، ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له.**

ويبين الجدول (2.6)، **القيمة المطلقة للخطأ بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (2.6) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt{620}$.

الجدول (2.6)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	24.5	0.3998	600.25
التقريب الثاني r_2	24.75	0.1498	612.5625
التقريب الثالث r_3	24.875	0.0248	618.7656

نلاحظ أن التقريبين الأول والثاني اللذين توصلنا إليهما من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 620**، ذلك أن مربع قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينهما وبين العدد** 620**، لكن التقريب**

الثالث يعد تقريبا جيدا جدا إذا ما قورن بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 620.

وبالرغم من توصلنا إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية لكل من الأعداد 620 , 280 , 19 **في الأمثلة** (2.6)، (2.5) ، (2.4) **السابقة على الترتيب، فإن استخدام هذه الطريقة يتطلب وقتا وجهدا كبيرين نوعا ما، ذلك أنها تستدعي التجريب للوصول إلى الفترة التي تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد اللذان يتطلبانه تعويض كل من التقريبين الأول والثاني في الاقتران المفروض، واختيار الفترة التي تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو في كل مرة منها بعد عملية التعويض.**

كما ونلاحظ أن هذه النظرية غير مناسبة لأن تعطى للطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية؛ لما تتطلبه من معرفتهم بمفاهيم قد تكون مستحيلة الفهم وصعبة جدا عليهم, كمعرفتهم بمفهومي الاقتران والاتصال واتقانهم للشروط الواجب توافرها لتطبيق هذه النظرية إلى غيرها من الأمور الأخرى.

2.3 طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson's Method)

تعتبر هذه الطريقة من أشهر الطرق المستخدمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ **والقريب من قيمة معينة، وهذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة** (**Fixed-Point Method**).

ويمكن الاستفادة من هذه الطريقة في إيجاد قيم تقريبية للجذور التربيعية، وذلك من خلال استخدام الصيغة التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وذلــك باعتبــار x_0 هــي قيمــة تقريبيــة مبدأيــة (أوليــة) لجــذر المعادلــة $f(x) = 0$ ، **وباعتبار:**

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$

هي كلها قيم تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$.

ويمكن التطبيق عل طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method) فــي إيجــاد قــيم تقريبيــة للجــذر التربيعــي للعــدد c ، وذلــك مــن خــلال اتبــاع الخطوات التالية:

- **نضع** $x = \sqrt{c}$
- **نربع الطرفين** $x^2 = c$

$$\rightarrow \quad x^2 - c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

- **نكتب الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ حيث:**

$$f(x) = x^2 - c$$

- **نجد مشتقة الاقتران** $f(x)$ **حيث:**

$$f'(x) = 2x$$

- **وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

حيث يمكن الوصول إلى التقريب الثاني x_1 **للجذر التربيعي للعدد** c **بعد أن نأخذ** x_0 **كقيمة تقريبية أولية.**

ونستمر هكذا بالتطبيق على هذه الصيغة حتى نصل إلى أقرب قيمة للجذر التربيعي للعدد c **من القيمة الحقيقية له.**

وسوف أتوقف أثناء استخدام طريقة نيوتن–رافسون عند التقريب الثالث على الأكثر فقط (x_2 **) عند إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد المطلوب.**

مثال(2.7): **باستخدام طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method)، أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{19}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{19}$

$$x^2 = 19$$

$$\rightarrow x^2 - 19 = 0 \quad \ldots\ldots.. (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^2 - 19$$

$$\Longrightarrow \qquad f'(x) = 2x$$

وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيـار القيمـة التقريبيـة المبدئيـة $x_0 = 4$ **، نجـد أن التقريـب الثـاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^2 - 19}{2x_0}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 4 - \frac{16 - 19}{8} = 4.375$$

والتقريب الثالث x_2 **هو:**

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^2 - 19}{2x_1}$$

$$x_2 \approx 4.375 - \frac{(4.375)^2 - 19}{2(4.375)}$$

$$\Rightarrow x_2 \approx 4.3589$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{19} = 4.3589$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19 **ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2.

ويبين الجدول (2.7) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (2.7) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.7)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول x_0	4	0.3589	16
التقريب الثاني x_1	4.375	0.0161	19.1406
التقريب الثالث x_2	4.3589	0.0000	19

نلاحظ أن التقريب الأول (المفترض x_0) بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 19، **ذلك أن مربع قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد** 19، **أما التقريبين الثاني (** x_1 **) والثالث (** x_2 **) اللذين توصلنا إليهما من خلال استخدام طريقة نيوتن–رافسون فإنهما يعدان تقريبين ممتازين ودقيقين جدا إذا ما قورنا بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19.

مثال(2.8): **باستخدام طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method)، أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{280}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{280}$

$$x^2 = 280$$

$$\rightarrow\ x^2 - 280 = 0 \quad .... (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) **في الخطوة السابقة؛ هو:**

$$f(x) = x^2 - 280$$

$$\Longrightarrow \qquad f'(x) = 2x$$

وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيار القيمة التقريبية المبدئية $x_0 = 17$ ، **نجد أن التقريب الثاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^2 - 280}{2x_0} = 17 - \frac{(17)^2 - 19}{2(17)}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 16.7353$$

والتقريب الثالث x_2 **هو:**

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^2 - 280}{2x_1}$$

$$x_2 \approx 16.7353 - \frac{(16.7353)^2 - 280}{2(16.7353)}$$

$$\Rightarrow x_2 \approx 16.7332$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{280} = 16.7332$ ، **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280**، ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2.

ويبين الجدول (2.8) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (2.8) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.8)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول x_0	17	0.2668	289
التقريب الثاني x_1	16.7353	0.0021	280.0703
التقريب الثالث x_2	16.7332	0.0000	280

نلاحظ أن التقريب الأول x_0 **(المفترض) بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280، **ذلك أن مربع قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد** 280، **لكن التقريبين الثاني والثالث** (x_2 ، x_1) **يعدان تقريبين ممتازين إذا ما قورنا بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280.

مثال(2.9): **باستخدام طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method)، أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{620}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt{620}$

$$x^2 = 620$$

$$\rightarrow x^2 - 620 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^2 - 620$$

$$\Longrightarrow \qquad f'(x) = 2x$$

وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيار القيمة التقريبية المبدئية $x_0 = 25$ **، نجد أن التقريب الثاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^2 - 620}{2x_0} = 25 - \frac{(25)^2 - 620}{2(25)}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 24.9$$

والتقريب الثالث x_2 **هو:**

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^2 - 620}{2x_1}$$

$$x_2 \approx 24.9 - \frac{(24.9)^2 - 620}{2(24.9)}$$

$$\Rightarrow x_2 \approx 24.8998$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{620} = 24.8998$ **، لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620**، ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2.

ويبين الجدول (2.9) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (2.9) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (2.9)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مربع القيمة التقريبية
التقريب الأول x_0	25	0.1002	625
التقريب الثاني x_1	24.9	0.0002	620.01
التقريب الثالث x_2	24.8998	0.0000	620

نلاحظ أن التقريب الأول x_0 **(المفترض) بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620**، ذلك أن مربع قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد** 620**، لكن التقريبين الثاني والثالث (** x_2 **،** x_1 **) يعدان تقريبين ممتازين إذا ما قورنا بالقيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620.

مما سبق نجد أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون فإننا نتوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، ولكن ومن وجهة نظري فإن أمر اختيار التقريب الأولي x_0 **قد يسبب بعض الإرباك في بداية استخدام هذه الطريقة من قبل المتعلم، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد اللذان يتطلبانه تعويض كل من التقريبين الأول والثاني في صيغة نيوتن–رافسون في كل مرة منها.**

كما أن أمر معرفة الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية بمفهومي الاقتران والاشتقاق وحتى في عملية التعويض لأكثر من مرة، قد يشكل عائقا ضد استخدام هذه الطريقة في مرحلتهم الأساسية تلك.

2.4 متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series)

واحدة من أشهر المتسلسلات ذات الحدين تستخدم للعديد من الأغراض الرياضية، ولكننا في هذا الجزء سوف نستخدمها فقط في تقريب الجذور التربيعية، حيث أننا سنبدأ بأخذ الحدين $1+x$، وباعتبار أن α عدد حقيقي بحيث أن $\alpha \neq 0$، وأن شكل الاقتران هو:

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

فإذا كانت $\alpha > 0$، فإننا سوف نستخدم الصيغة (1) أدناه لتقريب الجذر التربيعي.

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\ldots\ldots(1)$$

وإذا كانت $\alpha < 0$، فإننا نستخدم الصيغة (2) أدناه لتقريب الجذر التربيعي.

$$(1-x)^{\alpha} = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\ldots\ldots(2)$$

ويمكـن التطبيـق علـى متسلسـلة ذات الحـدين (Binomial Series) وذلـك لإيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد C ، وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

- **نجد المربع الكامل الأقرب (S) إلى العدد المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لجذره التربيعي وهو العدد C .**

- **نكتب العدد المطلوب إيجاد قيمة تقريبية لجذره التربيعي (C) بدلالة المربع الكامل مضافا إليه أو منقوصا منه عدد معين مثل h بحيث لا يغير من قيمة العدد C كما يلي:**

$$\sqrt{c} = (s \pm h)^{\frac{1}{2}}$$

- **نقوم بإخراج المربع الكامل كعامل مشترك لنحصل على:**

$$\sqrt{c} = s^{\frac{1}{2}} (1 \pm \frac{h}{s})^{\frac{1}{2}}$$

- **نقوم بالتطبيق على إحدى المتسلسلتين (1),(2) وذلك حسب إشارة منتصف الحدين لنحصل على قيمة قريبة جدا من الجذر التربيعي للعدد C .**

ومن الجدير بالذكر هنا، بأننا سوف نستخدم أول ثلاثة حدود فقط من المتسلسلتين (1),(2) آنفتا الذكر، وذلك لأن استخدام تلك الحدود فقط تكفي لأن تعطي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد C .

مثال (2.10): **قدر قيمة** $\sqrt{19}$ **باستخدام أول ثلاثة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt{19}=(16+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{19}=(16(1+\frac{4}{16}))^{\frac{1}{2}}=4(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$$

وبتطبيق المقدار $(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ **على الصيغة** (1) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt{19}\approx 4(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{4})+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\frac{1}{4})^{2})$$

$$\sqrt{19}\approx 4(1+\frac{1}{8}-(\frac{1}{8})(\frac{1}{16}))$$

$$\sqrt{19}\approx 4(\frac{9}{8}-\frac{1}{128})=4(\frac{143}{128})=\frac{143}{32}$$

$$\Rightarrow \sqrt{19}\approx 4.4688$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه $\sqrt{19} = 4.3589$ **وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي** 0.1099**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 19.9702.

مثال (2.11)**: قدر قيمة** $\sqrt{280}$ **باستخدام أول ثلاثة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt{280} = (289-9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{280} = (289(1-\frac{9}{289}))^{\frac{1}{2}} = 17(1-\frac{9}{289})^{\frac{1}{2}}$$

وبتطبيق المقدار $(1-\frac{9}{289})^{\frac{1}{2}}$ **على الصيغة** (2) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt{280} \approx 17(1-\frac{1}{2}(\frac{9}{289}) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\frac{9}{289})^2)$$

$$\sqrt{280} \approx 17(1-\frac{9}{578} - (\frac{1}{8})(\frac{81}{83521}))$$

$$\sqrt{280} \approx 17(\frac{569}{578} - \frac{81}{668168})$$

$$= 17(\frac{657683}{668168}) = \frac{657683}{39304}$$

$$\Rightarrow \sqrt{280} \approx 16.7332$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{280} = 16.7332$ ، **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي** 0.0000، **وأن مربع القيمة التقريبية هو** 280.

مثال (2.12): **قدر قيمة** $\sqrt{620}$ **باستخدام أول ثلاثة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt{620} = (625-5)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{620} = (625(1-\frac{5}{625}))^{\frac{1}{2}} = 25(1-\frac{1}{125})^{\frac{1}{2}}$$

وبتطبيق المقدار $(1-\frac{1}{125})^{\frac{1}{2}}$ **على الصيغة** (2) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt{620} \approx 25(1-\frac{1}{2}(\frac{1}{125})+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\frac{1}{125})^{2})$$

$$\sqrt{620} \approx 25(1-\frac{1}{250}-(\frac{1}{8})(\frac{1}{15625}))$$

$$\sqrt{620} \approx 25(\frac{249}{250}-\frac{1}{125000})$$

$$= 25(\frac{124499}{125000}) = \frac{124499}{5000}$$

$$\Rightarrow \sqrt{620} \approx 24.8998$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{620} = 24.8998$ ، لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 620، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي 0.0000، وأن مربع القيمة التقريبية هو 620.

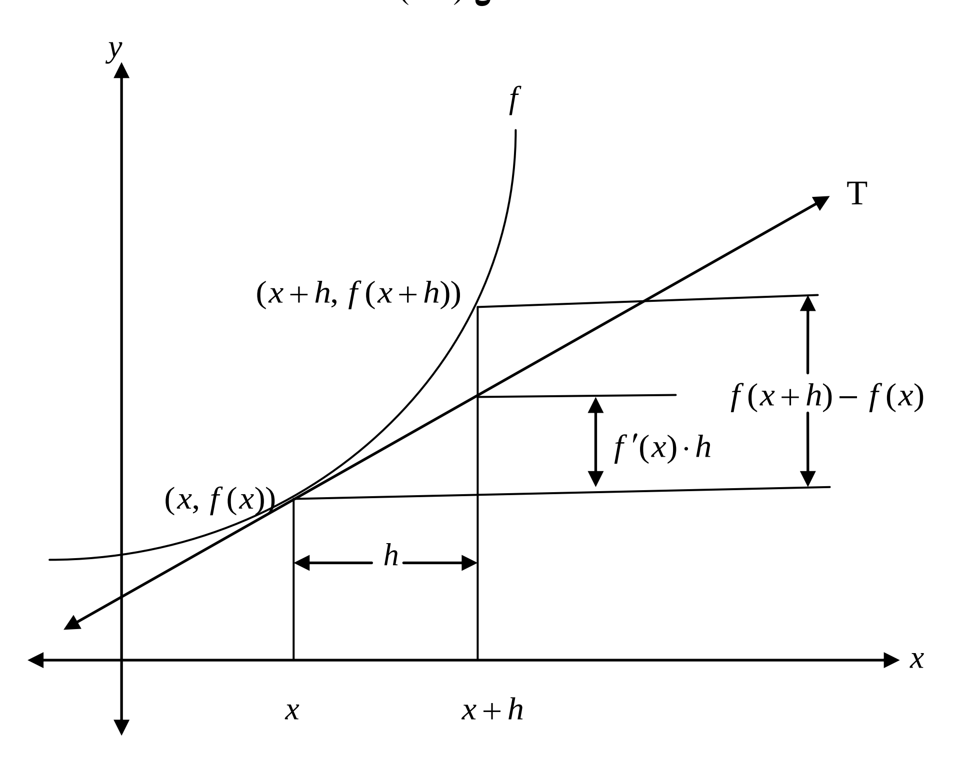
مما سبق، نجد أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين فإنه يمكننا التوصل إلى قيمة قريبة جدا جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد C ، ولكن أمر معرفة الطلاب بمفهومي الاقترانات والمتسلسلات، وأمر التطبيق عليهما لهما أمران يفوقان مستوياتهم التعليمية، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد الذي تتطلبه عملية التعويض في المتسلسلة نفسها.

ومن هنا، فإن استخدام هذه الطريقة لا يتناسب مع مستويات الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية ومع قدراتهم ومعارفهم البسيطة.

2.5 طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method)

أنظر الشكل (2.1)، والذي يبين منحنى الاقتران f القابل للاشتقاق على فترة معينة، حيث أن المماس T يمس الاقتران f في النقطة $(x, f(x))$.
حيث يوضح هذا الشكل مقدار التغير في الاقتران f من x إلى $x+h$، وتمثل h هنا قيمة قليلة حيث $h \neq 0$.

الشكل (2.1)



لذا؛ يمكن تقريب المقدار $f(x+h)-f(x)$ **كحاصل ضرب** $f'(x)h$ **، وبالتالي فإن:**

$$f(x+h)-f(x)\cong f'(x)\cdot h$$

ومن هنا فإن الفرق بين المقدارين:

$$\left[f(x+h)-f(x)\right]-f'(x)\cdot h$$

هو مقدار صغير يقارن بقيمة h **الصغيرة.**

وبالتالي فإن نسبة:

$$\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]-f'(x)\cdot h}{h}$$

تؤول إلى 0 **عندما** h **تؤول إلى** 0.

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]-f'(x)\cdot h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)}{h}=f'(x)-f'(x)=0$$

ويمكن توضيح المقدارين $f(x+h)-f(x)$ **،** $f'(x)h$ **من خلال التعريف التالي:**

تعريف (2.1):

إذا كانت $h \neq 0$ ، فإن الفرق $f(x+h) - f(x)$ يدعى بـ" مقدار الزيادة في الاقتران f من x إلى $x+h$ "، ويرمز له بالرمز Δf :

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

وحاصل الضرب $f'(x)h$ يدعى بـ"تفاضل الاقتران f عند x بزيادة مقدارها h "، ويرمز له بالرمز df :

$$df = f'(x) \cdot h$$

مما سبق، يتبين لدينا بأن المقدارين df ، Δf متساويان تقريبا:

$$\Delta f \cong df$$

وبما أن:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + \Delta f$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + df$$

$$\boxed{\therefore\ f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h ....*}$$

لأن $df = f'(x) \cdot h$ كما تبين لنا سابقا.

ويطلق على النتيجة (*) على أنها "التقريب الخطي للاقتران f "

ويمكن التطبيق على طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method) في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد c ، وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

لإيجاد $\sqrt{c}$:

- **نفرض أن** $f(x)=\sqrt{x}$
- **نجد مشتقة الاقتران** $f(x)$ **حيث:**

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- **نجد قيمة** x **حيث** x **المربع الكامل الأقرب إلى العدد** c .
- **نجد قيمة المقدار** $x+h$ **حيث:**

$$h=c-x$$

- **نطبق على العلاقة (*) حيث:**

$$\therefore\ f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h.........*$$

لنحصل في نهاية الأمر على تقريب جيد للجذر التربيعي للعدد c **، هذا إذا كانت قيمة** h **صغيرة وكانت** $h\neq 0$ **أيضا.**

مثال (2.13): **قدر قيمة** $\sqrt{19}$.

الحل:

نفرض أن $f(x)=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 19 **هو العدد** 16.

$$x+h=16+3$$

حيث أن: $h=3$

والآن نطبق على العلاقة (*) **حيث:**

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h.........*$$

$$f(16+3)=f(16)+f'(16)(3)$$

$$f(19)\approx\sqrt{16}+\frac{1}{2\sqrt{16}}(3)$$

$$f(19)\approx 4+\frac{1}{(2)(4)}(3)=4+\frac{3}{8}=4+0.375=4.375$$

أي أن:

$$\sqrt{19}\approx 4.375$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{19} = 4.3589$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{19}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0161**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 19.1406.

مثال (2.14)**: قدر قيمة** $\sqrt{280}$.

الحل:

نفرض أن $f(x) = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 280 **هو العدد** 289.

$$x + h = 289 + -9$$

حيث أن: $h = -9$

والآن نطبق على العلاقة (*) **حيث:**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h.........*$$

$$f(289 + -9) = f(289) + f'(289)(-9)$$

$$f(280) \approx \sqrt{289} + \frac{1}{2\sqrt{289}}(-9)$$

$$f(280) \approx 17 - \frac{9}{(2)(17)} = 17 - \frac{9}{34}$$

$$= 17 - 0.2647 = 16.7353$$

أي أن:

$$\sqrt{280} \approx 16.7353$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{280} = 16.7332$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{280}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0021، **وأن مربع القيمة التقريبية هو** 280.0703.

مثال (2.15): **قدر قيمة** $\sqrt{620}$.

الحل:

نفرض أن $f(x)=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 620 **هو العدد** 625.

$$x+h=625+-5$$

حيث أن: $h=-5$

والآن نطبق على العلاقة (*) **حيث:**

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h.........*$$

$$f(625+-5)=f(625)+f'(625)(-5)$$

$$f(620)\approx\sqrt{625}+\frac{1}{2\sqrt{625}}(-5)$$

$$f(620)\approx 25-\frac{5}{(2)(25)}=25-\frac{5}{50}$$

$$=25-0.1=24.9$$

أي أن:

$$\sqrt{620}\approx 24.9$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{620} = 24.8998$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{620}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0002**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 620.01.

مع ملاحظة أنه كلما زادت قيمة h **قلت الدقة في إيجاد القيمة التقريبية للجذر التربيعي للعدد المطلوب، وكلما كانت** h **صغيرة فإن الدقة في القيمة التقريبية للجذر التربيعي للعدد المطلوب تكون أفضل عند استخدام طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method)، ولبيان ذلك بشكل أفضل سوف نستعرض المثال التالي.**

مثال (2.16)**: قدر قيمة** $\sqrt{101}$.

الحل:

نفرض أن $f(x) = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 101 **هو العدد** 100.

$$x + h = 100 + 1$$

حيث أن: $h = 1$

والآن نطبق على العلاقة (*) **حيث:**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h ....*$$

$$f(100+1) = f(100) + f'(100)(1)$$

$$f(101) \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(1)$$

$$f(101) \approx 10 + \frac{1}{(2)(10)}(1) = 10 + \frac{1}{20}$$

$$= 10 + 0.05 = 10.05$$

أي أن:

$$\sqrt{101} \approx 10.05$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه $\sqrt{101} = 10.0499$ **وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 101 (**ذلك أن قيمة** h **صغيرة**)، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{101}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0001، **وأن مربع القيمة التقريبية هو** 101.0025.

مما سبق، نجد أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي فإنه يمكننا التوصل إلى قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد c ، **ولكن أمر معرفة الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية بمفاهيم مثل مفهوم الاقتران والاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق يشكل عائقا معقولا ضد استخدام هذه الطريقة، كما أن أمر التطبيق على هذه الطريقة يتطلب أن تكون** h **قيمة صغيرة (بحيث لا تساوي الصفر)، حتى يؤدي التطبيق على هذه الطريقة إلى التوصل إلى قيمة تقريبية تكون قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد المطلوب.**

2.6 كثير حدود تايلور **(Taylor Polynomials)**

في هذا الجزء سوف نقوم بتعميم متسلسلة تايلور (Taylor Series) ذات القوة x **على متسلسلة تايلور ذات القوة** $x-a$ ، **حيث** a **عدد حقيقي، وسنبدأ أولا بذكر نظرية تايلور (Taylor's Theorem).**

نظرية تايلور (2.2):

افرض أن الاقتران f قابل للاشتقاق لـ $n+1$ من المرات على الفترة المفتوحة I حيث $a \in I$ فإن لكل $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

حيث:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$$

وأن كثير الحدود التالي:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

يدعى بـ"كثير حدود تايلور ذي القوة n للاقتران f لـ $x-a$ "، والذي يمكن الاستفادة منه في إيجاد قيم تقريبية للجذور التربيعية بحيث تكون تلك القيم قريبة جدا من القيم الحقيقية لتلك الجذور.

ويمكن التطبيق على كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials) في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد c ، وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية: (علما بأننا سوف نأخذ أول ثلاثة حدود فقط من كثير حدود تايلور عند التطبيق عليه).

فلإيجاد $\sqrt{c}$:

- **نفرض أن** $x = c$
- **نبحث عن أقرب مربع كامل من العدد** c **وليكن** a .
- **نجد قيمة** $x - a$.
- **نفرض أن** $f(x) = \sqrt{x}$ ، **ثم نجد المشتقة الأولى للاقتران** f **حيث:**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- **نجد المشتقة الثانية للاقتران** f **حيث:**

$$f''(x) = \frac{-1(2(\frac{1}{2\sqrt{x}}))}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

- **نطبق على أول ثلاثة حدود من كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials) لنتوصل في نهاية الأمر إلى قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** c .

مثال (2.17): **استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{19}$.

الحل:

نفرض أن: $x = 19$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 19 **هو** 16.

لذا:

$$x - a = 19 - 16 = 3$$

الآن نفرض أن:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(19) = f(16) + f'(16)(3) + \frac{f''(16)}{2!}(3)^2$$

$$P_n(19) \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(3) + \frac{-1}{\frac{4\sqrt{(16)^3}}{2}}(9)$$

$$= 4 + \frac{3}{2(4)} - \frac{9}{8(64)} = \frac{2231}{512} = 4.3574$$

أي أن:

$$\sqrt{19} \approx 4.3574$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{19} = 4.3589$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 19**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ**

بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ $\sqrt{19}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0015**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 18.9869.

مثال (2.18)**: استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{280}$.

الحل:

نفرض أن: $x = 280$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 280 **هو** 289.

لذا:

$$x - a = 280 - 289 = -9$$

الآن نفرض أن:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(280) = f(289) + f'(289)(-9) + \frac{f''(280)}{2!}(-9)^2$$

$$P_n(280) \approx \sqrt{289} + \frac{1}{2\sqrt{289}}(-9) + \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(289)^3}}}{2}(81)$$

$$= 17 - \frac{9}{2(17)} - \frac{81}{8(4913)} = 17 - 0.2647 - 0.0021$$

$$= 16.7332$$

أي أن:

$$\sqrt{280} \approx 16.7332$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{280}=16.7332$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 280، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{280}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0000، **وأن مربع القيمة التقريبية هو** 280.

مثال (2.19): **استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{620}$.

الحل:

نفرض أن: $x=620$

المربع الكامل الأقرب إلى العدد 620 **هو** 625.

لذا:

$$x-a=620-625=-5$$

الآن نفرض أن:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(620) = f(625) + f'(625)(-5) + \frac{f''(620)}{2!}(-5)^2$$

$$P_n(620) \approx \sqrt{625} + \frac{1}{2\sqrt{625}}(-5) + \frac{-1}{\frac{4\sqrt{(625)^3}}{2}}(25)$$

$$= 25 - \frac{5}{2(25)} - \frac{25}{8(15625)} = 25 - 0.1 - 0.0002$$

$$= 24.8998$$

أي أن:

$$\sqrt{620} \approx 24.8998$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt{620} = 24.8998$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد** 620**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt{620}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0000**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 620.

مما سبق، نجد أنه وباستخدام طريقة التقريب من خلال كثير حدود تايلور فإننا نتوصل إلى قيمة دقيقة وصحيحة للجذر التربيعي للعدد C **من قيمته الحقيقية، ولكنني أرى أن أمر معرفة الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية بمفهوم الاقتران ومفهوم المتسلسلات والاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق وحتى بمفهوم كثير الحدود يفوق مستوياتهم ومقدرتهم ومعارفهم المتواضعة لأن يطبقوا على هذه الطريقة.**

ومن هنا فإن استخدام طريقة التقريب من خلال كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials) في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي أمر لا يتناسب مع الطلاب في المراحل الأساسية عموما رغم النتائج الدقيقة التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة.



طريقة الحصر

(Restriction Method)

لتقريب الجذور التربيعية

3.1 طريقة الحصر لتقريب الجذور التربيعية (Restriction Method)

تعتمد هذه الطريقة في اشتقاقها وفي تقريب الجذور التربيعية من خلالها على أسلوب حصر العدد المطلوب إيجاد جذره التربيعي بين مربعين كاملين متتاليين، وعلى اعتبار أن الوسط الحسابي لناتجي الجذرين التربيعيين للمربعين الكاملين المتتاليين هو تقريب أولي للجذر التربيعي للعدد المطلوب.

أي أنه إذا كان a^2 ، b^2 مربعين كاملين متتاليين، وكانت x تقع بينهما فإن:

$$\sqrt{x} \approx \frac{a+b}{2}$$

هو أول تقريب للعدد $\sqrt{x}$.

وسوف نستخدم في اشتقاق طريقة الحصر (Restriction Method) أحد قوانين التناسب المعروفة، وهو أنه

إذا كان: $\frac{A}{B} = r$ **وكان:** $\frac{C}{D} = r$

فإن:

$$\frac{A+C}{B+D} = r$$

فلو أخذنا مثلا أنه

إذا كان: $\frac{6}{3}=2$ **وكان:** $\frac{8}{4}=2$

فإن:

$$\frac{6+8}{3+4}=\frac{14}{7}=2$$

ولاشتقاق طريقة الحصر (Restriction Method) نبدأ أولا بأخذ الفرق بين ناتجي الجذرين التربيعيين للمربعين الكاملين المتتاليين.

حيث أننا نعلم أن:

$$a-b=1$$

حيث a,b **هما ناتجا الجذرين للمربعين الكاملين المتتاليين.**

$$(a-b)^2=1$$

$$a^2-2ab+b^2=1$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=2ab+1$$

بإضافة $2ab$ **للطرفين، فإن:**

$$a^2+2ab+b^2=4ab+1$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=4ab+1$$

$$a+b=\frac{4ab+1}{a+b}$$

بضرب الطرفين بالعدد $\frac{1}{2}$ **، تصبح:**

$$\frac{a+b}{2}=\frac{4ab+1}{2(a+b)}$$

وكما افترضنا في البداية أن:

$$\sqrt{x}\approx\frac{a+b}{2}$$

فإن:

$$\sqrt{x}\approx\frac{4ab+1}{2(a+b)}\text{.............}(1)$$

كذلك وبالعودة إلى الفرض الأولي:

$$\sqrt{x}\approx\frac{a+b}{2}$$

وبتربيع الطرفين، فإن:

$$x\approx\frac{(a+b)^2}{4}$$

وبضرب الطرفين بالعدد 2**، فإن:**

$$2x\approx\frac{(a+b)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{a+b} \approx \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \approx \frac{2x}{a+b}$$

وكما افترضنا في البداية أن:

$$\sqrt{x} \approx \frac{a+b}{2}$$

فإن:

$$\sqrt{x} \approx \frac{2x}{a+b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبتطبيق العلاقة (1) **والعلاقة** (2) **على قانون التناسب المذكور آنفا، فإن:**

$$\frac{4ab+1+2x}{2(a+b)+a+b} \approx \sqrt{x}$$

وباستخدام العلاقة (2) **مرة ثانية، فإن:**

$$\frac{4ab+1+2x+2x}{3a+3b+a+b} \approx \sqrt{x}$$

أي أن:

$$\sqrt{x} \approx \frac{4x+4ab+1}{4a+4b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \approx \frac{4x+4ab+1}{4(a+b)} ....(*)$$

حيث a,b **هما ناتجا الجذرين للمربعين الكاملين المتتاليين** a^2,b^2 **على الترتيب.**

وبالتالي فإن العلاقة:

$$\sqrt{x} \approx \frac{4x+4ab+1}{4(a+b)}$$

تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية.

ويمكن التطبيق على طريقة الحصر (Restriction Method) في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

- **نقوم بداية بحصر العدد** x **بين مربعين كاملين متتاليين، حيث:**

$$b^2 > x > a^2$$

- **نجد ناتجي الجذرين التربيعيين** a,b **للمربعين الكاملين المتتاليين** a^2,b^2 **، حيث أن:**

$$b > \sqrt{x} > a$$

- **نطبق على العلاقة التالية:**

$$\boxed{\sqrt{x} \approx \frac{4x+4ab+1}{4(a+b)}}$$

لنحصل في نهاية الأمر على قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية لـ $\sqrt{x}$.

مثال(3.1): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{19}$.

الحل:

$$25 \;>\; x \;>\; 16$$

$$> \sqrt{x} \;>\; 4 \;\; 5$$

$$\sqrt{x} \approx \frac{4x+4ab+1}{4(a+b)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{19} \approx \frac{4(19)+4(4)(5)+1}{4(4+5)} = \frac{76+80+1}{36}$$

$$\Rightarrow \sqrt{19} \approx \frac{157}{36} = 4.3611$$

أي أن: $\sqrt{19} \approx 4.3611$

نلاحظ أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 19 **، ذلك أنه وباستخدام**

الآلة الحاسبة، نجد أن $\sqrt{19}=4.3589$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي** (0.0022)، **وأن مربع القيمة التقريبية هو** 19.0192.

مثال(3.2): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{280}$.

الحل:

$$289 > x > 256$$

$$17 > \sqrt{x} > 16$$

$$\sqrt{x}\approx\frac{4x+4ab+1}{4(a+b)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{280}\approx\frac{4(280)+4(16)(17)+1}{4(16+17)}=\frac{1120+1088+1}{132}$$

$$\Rightarrow\sqrt{280}\approx\frac{2209}{132}=16.7348$$

أي أن:

$$\sqrt{280}\approx16.7348$$

نلاحظ أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 280 ، **ذلك أنه وباستخدام**

الآلة الحاسبة، نجد أن $\sqrt{280} = 16.7332$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي** (0.0016)**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 280.0535.

مثال(3.3): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt{620}$.

الحل:

$$625 > x > 576$$

$$> \sqrt{x} > 24 \quad 25$$

$$\sqrt{x} \approx \frac{4x + 4ab + 1}{4(a+b)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{620} \approx \frac{4(620) + 4(24)(25) + 1}{4(24+25)} = \frac{2480 + 2400 + 1}{196}$$

$$\Rightarrow \sqrt{620} \approx \frac{4881}{196} = 24.9031$$

أي أن:

$$\sqrt{620} \approx 24.9031$$

نلاحظ أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 620 ، **ذلك أنه وباستخدام**

الآلة الحاسبة، نجد أن $\sqrt{620} = 24.8998$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي** (0.0033)**، وأن مربع القيمة التقريبية هو** 620.1644.

مما يعني أن طريقة الحصر (Restriction Method) يؤدي التطبيق عليها إلى التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، وذلك نظرا للنتائج الجيدة التي توصلنا إليها من الأمثلة (3.3)**،** (3.2)**،** (3.1) **السابقة، حيث أظهر استخدام هذه الطريقة (طريقة الحصر) سهولة واضحة أثناء التطبيق عليها، وبساطة في الفهم بحيث يستطيع المتعلم في المرحلة الأساسية على الأقل أن يستخدمها للتوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية؛ وذلك لخلوها من مفاهيم معقدة بعض الشيء عند الطلاب غير المتخصصين في مجال الرياضيات كمفهوم الاقتران مثلا ومفهوم المتسلسلات إلى مفهوم الاشتقاق وغيرها من المفاهيم الأخرى والتي نجدها من ركائز الطرق الأخرى سابقة الذكر.**

ومن هنا، فإنني أجد أن طريقة الحصر (Restriction Method) هي طريقة ملائمة لأن تعطى للطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية، وأرى أن ينظر لها المتخصصون والقائمون على إعداد المناهج المدرسية بعين الاعتبار.

3.2 استخدام طريقة الحصر (Restriction Method) في تقريب بعض الجذور التربيعية

والآن سوف نستعرض من خلال الجدول (3.1) عدة أمثلة محلولة تظهر استخدام طريقة الحصر في تقريب الجذور التربيعية لأعداد مختارة عشوائيا، كما وتظهر أيضا القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية والقيم الحقيقية ومربع القيم التقريبية في كل منها.

الجدول(3.1)

الجذر التربيعي لـ X	المربعان الكاملان (a^2,b^2)	جذرا المربعين (a,b)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مربع القيمة التقريبية
$\sqrt{3}$	(1 , 4)	(1 , 2)	4(3)+4(1)(2) +1 [illegible]	1.75	1.7321	0.0179	3.0625
$\sqrt{8}$	(4 , 9)	(2 , 3)	4(8)+4(2)(3) +1 [illegible]	2.85	2.8284	0.0216	8.1225

الجذر التربيعي لـ x	المربعان الكاملان (a^2,b^2)	جذرا المربعين (a,b)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مربع القيمة التقريبية
$\sqrt{12}$	(9 , 16)	(3 , 4)	$\frac{4(12)+4(3)(4)+1}{4(3+4)}$	3.4643	3.4641	0.0002	12.0014
$\sqrt{17}$	(16 , 25)	(4 , 5)	$\frac{4(17)+4(4)(5)+1}{4(4+5)}$	4.1389	4.1231	0.0158	17.1305
$\sqrt{33}$	(25 , 36)	(5 , 6)	$\frac{4(33)+4(5)(6)+1}{4(5+6)}$	5.75	5.7446	0.0054	33.0625
$\sqrt{40}$	(36 , 49)	(6 , 7)	$\frac{4(40)+4(6)(7)+1}{4(6+7)}$	6.3269	6.3246	0.0023	40.0297

الجذر التربيعي لـ X	$\sqrt{50}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{87}$	$\sqrt{120}$
المربعان الكاملان (a^2,b^2)	(49 , 64)	(64 , 81)	(81 , 100)	(100 , 121)
جذرا المربعين (a,b)	(7 , 8)	(8 , 9)	(9 , 10)	(10 , 11)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	$\frac{4(50)+4(7)(8)+1}{4(7+8)}$	$\frac{4(73)+4(8)(9)+1}{4(8+9)}$	$\frac{4(87)+4(9)(10)+1}{4(9+10)}$	$\frac{4(120)+4(10)(11)+1}{4(10+11)}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	**7.0833**	**8.5441**	**9.3289**	**10.9643**
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	**7.0711**	**8.5440**	**9.3274**	**10.9545**
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	**0.0122**	**0.0001**	**0.0015**	**0.0098**
مربع القيمة التقريبية	**50.1731**	**73.0016**	**87.0284**	**120.2159**

الجذر التربيعي لـ x	المربعان الكاملان (a^2,b^2)	جذرا المربعين (a,b)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مربع القيمة التقريبية
$\sqrt{133}$	(121 , 144)	(11 , 12)	$\frac{4(133)+4(11)(12)+1}{4(11+12)}$	11.5326	11.5326	0.0000	133
$\sqrt{150}$	(144 , 169)	(12 , 13)	$\frac{4(150)+4(12)(13)+1}{4(12+13)}$	12.25	12.2474	0.0026	150.0625
$\sqrt{175}$	(169 , 196)	(13 , 14)	$\frac{4(175)+4(13)(14)+1}{4(13+14)}$	13.2315	13.2288	0.0027	175.0726
$\sqrt{219}$	(196 , 225)	(14 , 15)	$\frac{4(219)+4(14)(15)+1}{4(14+15)}$	14.8017	14.7986	0.0031	219.0903

الجذر التربيعي لـ X	المربعان الكاملان (a^2, b^2)	جذرا المربعين (a,b)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مربع القيمة التقريبية
$\sqrt{230}$	(225 , 256)	(15 , 16)	$\frac{4(230)+4(15)(16)+1}{4(15+16)}$	**15.1694**	**15.1658**	**0.0036**	**230.1107**
$\sqrt{280}$	(256 , 289)	(16 , 17)	$\frac{4(280)+4(16)(17)+1}{4(16+17)}$	**16.7348**	**16.7332**	**0.0016**	**280.0535**
$\sqrt{600}$	(576 , 625)	(24 , 25)	$\frac{4(600)+4(24)(25)+1}{4(24+25)}$	**24.4949**	**24.4949**	**0.0000**	**600**

الجذر التربيعي لـ X	المربعان الكاملان (a^2,b^2)	جذرا المربعين (a,b)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مربع القيمة التقريبية
$\sqrt{890}$	(841 , 900)	(29 , 30)	$\frac{4(890)+4(29)(30)+1}{4(29+30)}$	29.8347	29.8329	0.0018	890.1093
$\sqrt{1100}$	(1089 , 1156)	(33 , 34)	$\frac{4(1100)+4(33)(34)+1}{4(33+34)}$	33.1679	33.1662	0.0017	1100.1096
$\sqrt{1260}$	(1225 , 1296)	(35 , 36)	$\frac{4(1260)+4(35)(36)+1}{4(35+36)}$	35.4965	35.4965	0.0000	1260

يتبين لدينا من خلال الجدول (3.1)**، أن طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التربيعية هي طريقة بسيطة وسهلة التطبيق وتتناسب مع الطلبة الذين هم في المرحلة الأساسية على الأقل، كما أنها تعتمد اعتمادا مباشرا على حصر العدد المطلوب تقريب جذره التربيعي بين مربعين كاملين متتاليين، وأنها تعطي قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية لجذر العدد المطلوب تقريبه، حيث أن الخطأ الناتج من استخدام هذه الطريقة يعد قليل جدا.**

كما ونلاحظ أنه كلما كان العدد المُراد تقريب جذره التربيعي قريبا من الوسط الحسابي للمربعين الكاملين المتتاليين كان التقريب دقيقا وجيدا جدا عند استخدام طريقة الحصر في عملية التقريب، وكلما كان ذلك العدد بعيدا عن الوسط الحسابي للمربعين الكاملين المتتاليين كان التقريب أقل دقة منه إذا ما قورن بالحالة الأولى، ويوضح الشكل (3.1) **مدى دقة التقريب للجذر التربيعي للعدد** X **إذا ما استخدمنا طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية له:**

الشكل (3.1)

وهذا لا يعني أنه إذا كان X **بعيدا عن الوسط الحسابي للمربعين الكاملين المتتاليين (** $\frac{a^2+b^2}{2}$ **) فإننا سوف نحصل على قيم تقريبية بعيدة كثيرا عن**

الجذر التربيعي للعدد X ، وإنما سوف تكون تلك القيم أقل دقة نوعا ما عن القيم التقريبية للجذر التربيعي للعدد X فيما إذا كان X قريبا من الوسط الحسابي للعددين b^2 ، a^2 .

3.3 مقارنة بين التقريبات المتحصلة من بعض الطرق وطريقة الحصر لبعض الجذور التربيعية

سنقدم الآن مقارنة بسيطة نستعرض فيها استخدام الطرق الخمسة الأخيرة (نظرية بلزانو، طريقة نيوتن–رافسون، متسلسلة ذات الحدين، التقريب الخطي والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور) الواردة في الفصل الثاني من هذه الدراسة بالإضافة إلى طريقة الحصر وذلك لتقريب بعض الجذور التربيعية لبعض الأعداد، حيث يبين الجدول (3.2) مدى فاعلية كل طريقة من الطرق الخمسة آنفة الذكر وفاعلية طريقة الحصر أيضا في تقريب تلك الجذور، مع ملاحظة أننا سوف نستعرض الأمثلة ذاتها التي استعرضناها في الجدول (3.1) باستخدام طريقة الحصر، كما سنقوم أيضا باستعراض التقريبات الأخرى لنفس الأمثلة وذلك بالتطبيق على كل من الطرق الخمسة (نظرية بلزانو، طريقة نيوتن–رافسون، متسلسلة ذات الحدين، التقريب الخطي والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور) مبينا بطبيعة الحال القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية والقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الطرق جميعها.

ولا بد من ملاحظة أننا سنقوم باعتماد التقريب الثالث على الأكثر للجذر التربيعي عند التطبيق على كل من نظرية بلزانو وطريقة نيوتن–رافسون، وبأننا سوف نأخذ أول ثلاثة حدود من كثير حدود تايلور عند التطبيق عليه، وسوف

نستخدم أول ثلاثة حدود من متسلسلة ذات الحدين، كما أننا سوف نقوم بتدوير النتائج التي سوف نتوصل إليها إلى أقرب أربع منازل عشرية فقط.

الجدول (3.2)

الجذر التربيعي لـ x	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{33}$
القيمة الحقيقية	1.7321	2.8284	3.4641	4.1231	5.7446
القيمة التقريبية (بلزانو)	1.75	2.875	3.375	4.125	5.75
القيمة المطلقة للخطأ (بلزانو)	0.0179	0.0466	0.0891	0.0019	0.0054
القيمة التقريبية (نيوتن)	1.7321	2.8284	3.4641	4.1231	5.7446
القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
القيمة التقريبية (ذات الحدين)	1.7344	2.8287	3.4583	4.1230	5.7448
القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	0.0023	0.0003	0.0058	0.0001	0.0002
القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	1.75	2.8333	3.5	4.125	5.75
القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	0.0179	0.0049	0.0359	0.0019	0.0054
القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	1.7188	2.8241	3.4167	4.1211	5.7396
القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	0.0133	0.0043	0.0474	0.0020	0.0050
القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	1.75	2.85	3.4643	4.1389	5.75
القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	0.0179	0.0216	0.0002	0.0158	0.0054

الجذر التربيعي لـ x	$\sqrt{40}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{87}$	$\sqrt{120}$	$\sqrt{133}$
القيمة الحقيقية	**6.3246**	**7.0711**	**8.544**	**9.3274**	**10.9545**	**11.5326**
القيمة التقريبية (بلزانو)	**6.375**	**7.125**	**8.5**	**9.375**	**10.875**	**11.5**
القيمة المطلقة للخطأ (بلزانو)	**0.0504**	**0.0539**	**0.0440**	**0.0476**	**0.0795**	**0.0326**
القيمة التقريبية (نيوتن)	**6.3246**	**7.0711**	**8.544**	**9.3274**	**10.9545**	**11.5326**
القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**
القيمة التقريبية (ذات الحدين)	**6.3241**	**7.0711**	**8.5446**	**9.3272**	**10.9545**	**11.5329**
القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	**0.0005**	**0.0**	**0.0006**	**0.0002**	**0.0**	**0.0003**
القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	**6.3333**	**7.0714**	**8.5556**	**9.3333**	**10.9545**	**11.5417**
القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	**0.0087**	**0.0003**	**0.0116**	**0.0059**	**0.0**	**0.0091**
القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	**6.3148**	**7.0707**	**8.5336**	**9.3209**	**10.9544**	**11.5242**
القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	**0.0098**	**0.0004**	**0.0104**	**0.0065**	**0.0001**	**0.0084**
القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	**6.3269**	**7.0833**	**8.5441**	**9.3289**	**10.9643**	**11.5326**
القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	**0.0023**	**0.0122**	**0.0001**	**0.0015**	**0.0098**	**0.0**

الجذر التربيعي لـ x	$\sqrt{150}$	$\sqrt{175}$	$\sqrt{219}$	$\sqrt{230}$	$\sqrt{280}$	$\sqrt{600}$
القيمة الحقيقية	12.2474	13.2288	14.798	15.1658	16.7332	24.4949
القيمة التقريبية (بلزانو)	12.25	13.25	14.75	15.125	16.75	24.5
القيمة المطلقة للخطأ (بلزانو)	0.0026	0.0212	0.0486	0.0408	0.0168	0.0051
القيمة التقريبية (نيوتن)	12.2474	13.2288	14.798	15.1658	16.7332	24.4949
القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
القيمة التقريبية (ذات الحدين)	12.2474	13.2287	14.798	15.1657	16.7332	24.4948
القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	0.0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0	0.0001
القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	12.25	13.2308	14.8	15.1667	16.7353	24.5
القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	0.0026	0.0020	0.0014	0.0009	0.0021	0.0051
القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	12.2448	13.2267	14.797	15.1648	16.7312	24.4896
القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	0.0026	0.0021	0.0013	0.0010	0.0020	0.0053
القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	12.25	13.2315	14.8017	15.1694	16.7348	24.4949
القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	0.0026	0.0027	0.0031	0.0036	0.0016	0.0

الجذر التربيعي لـ x	$\sqrt{890}$	$\sqrt{1100}$	$\sqrt{1260}$
القيمة الحقيقية	**29.8329**	**33.1662**	**35.4965**
القيمة التقريبية (بلزانو)	**29.875**	**33.125**	**35.5**
القيمة المطلقة للخطأ (بلزانو)	**0.0421**	**0.0412**	**0.0035**
القيمة التقريبية (نيوتن)	**29.8329**	**33.1662**	**35.4965**
القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	**0.0**	**0.0**	**0.0**
القيمة التقريبية (ذات الحدين)	**29.8329**	**33.1662**	**35.4964**
القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	**0.0**	**0.0**	**0.0001**
القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	**29.8333**	**33.1667**	**35.5**
القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	**0.0004**	**0.0005**	**0.0035**
القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	**29.8324**	**33.1658**	**35.4929**
القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	**0.0005**	**0.0004**	**0.0036**
القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	**29.8347**	**33.1679**	**35.4965**
القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	**0.0018**	**0.0017**	**0.0**

مما سبق فإنه يتبين لدينا أن القيم التقريبية المتحصلة من جراء استخدام نظرية بلزانو وطريقة نيوتن-رافسون ومتسلسلة ذات الحدين وطريقة التقريب الخطي وطريقة التقريب باستخدام كثير حدود تايلور بالإضافة إلى طريقة الحصر (Restriction Method) هي قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية لتلك الجذور، ذلك أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية الناتجة من استخدام أي منها والقيمة الحقيقية تعد قليلة جدا, ومن هنا فإن استخدام أي

من الطرق الستة آنفة الذكر يعطي قيما تقريبية جيدة جدا للجذور التربيعية وقريبة جدا من القيم الحقيقية لها.

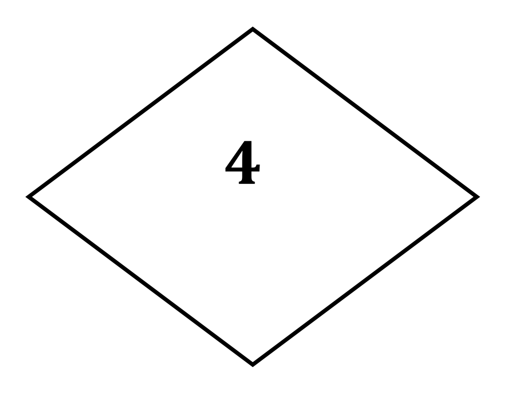
ويبقى هنا ملائمة أي من الطرق الستة مع المرحلة العمرية الأساسية، حيث أنني أرى – من وجهة نظري – أن:

- **استخدام نظرية بلزانو تعطي قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، ولكنها تتطلب التجريب للوصول إلى الفترة التي تتحقق فيها شروط النظرية نفسها، كما تتطلب الوقت والجهد اللازمين لاختيار الفترة التي تتحقق فيها شروط النظرية في كل مرة منها بعد عملية التعويض، وأن معرفة الطلاب بمفهوم الاقتران ومفهوم الاتصال وإتقانهم للشروط الواجب توافرها لتطبيق هذه النظرية يشكل عائقا ملحوظا للطلاب في المرحلة الأساسية تلك، وهذا ما يثبت عدم ملائمة نظرية بلزانو لأولئك الطلاب.**
- **طريقة نيوتن–رافسون تعطي قيما دقيقة للجذور التربيعية، ولكن ومن وجهة نظري فإن أمر اختيار التقريب الأولي قد يسبب بعض الإرباك في بداية استخدام هذه الطريقة من قبل الطلاب، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد اللذان يتطلبانه تعويض كل من التقريبين الأول والثاني في صيغة نيوتن–رافسون في كل مرة منها، ولذلك فإن هذه الطريقة غير ملائمة للطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية أيضا.**
- **إن استخدام متسلسلة ذات الحدين تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، ولكن أمر معرفة الطلاب بمفهومي الاقترانات والمتسلسلات، وأمر التطبيق عليهما لهما أمران**

يفوقان مستوياتهم التعليمية في مرحلتهم الأساسية، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد الذي تتطلبه عملية التعويض في المتسلسلة نفسها، لذلك فإن أمر استخدام هذه الطريقة لأولئك الطلاب غير مناسب.

- **كما أن استخدام طريقة التقريب الخطي تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، ولكن أمر معرفة الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية بمفاهيم أكبر من سنهم كمفهوم الاقتران ومفهوم الاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق يشكل عائقا معقولا ضد استخدام هذه الطريقة، كما أن أمر التطبيق على هذه الطريقة يتطلب أن تكون h قيمة صغيرة (بحيث $h \neq 0$) حتى يؤدي التطبيق على هذه الطريقة إلى التوصل إلى قيمة تقريبية تكون قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد المطلوب، لذا فإن طريقة التقريب الخطي لا تلائم طلاب المرحلة الأساسية عموما.**
- **إن طريقة التقريب باستخدام كثير حدود تايلور تعطي قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، ولكنني أرى أن أمر معرفة طلاب المرحلة الأساسية بمفهوم الاقتران ومفهوم المتسلسلات والاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق وحتى بمفهوم كثير الحدود يفوق مستوياتهم ومقدرتهم ومعارفهم المتواضعة لأن يطبقوا على هذه الطريقة، ومن هنا فإن استخدام طريقة التقريب من خلال كثير حدود تايلور أمر لا يتناسب مع الطلاب في المراحل الأساسية عموما رغم النتائج الجيدة التي تُوصِّلنا إليها هذه الطريقة.**

- **طريقة الحصر (Restriction Method) يؤدي التطبيق عليها إلى التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية، حيث أظهر استخدام هذه الطريقة سهولة واضحة أثناء التطبيق عليها، وبساطة في الفهم بحيث يستطيع المتعلم في المرحلة الأساسية على الأقل أن يستخدمها للتوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية؛ وذلك لخلوها من مفاهيم معقدة بعض الشيء عند الطلاب غير المتخصصين في مجال الرياضيات كمفهوم الاقتران مثلا ومفهوم المتسلسلات إلى مفهوم الاشتقاق وغيرها من المفاهيم الأخرى والتي نجدها من ركائز الطرق الأخرى سابقة الذكر، ومن هنا فإنني أجد أن طريقة الحصر (Restriction Method) هي طريقة ملائمة لأن تعطى للطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية.**



المكعب الكامل

&

جذره التكعيبي

مقدمة

ترتكز الكثير من التطبيقات والمسائل الحياتية على موضوع أساسي في الرياضيات ألا وهو موضوع الجذور التكعيبية للأعداد النسبية، وسنتطرق في هذا الفصل إلى المفاهيم الأساسية التي تمهد له لمعرفته مبتدئين أولا بدراسة مفهوم المكعب الكامل ومفهوم الجذر التكعيبي له وكيفية إيجاده، ومنتهين بعرض علاقة رياضية يؤدي التطبيق عليها إلى التوصل إلى كافة المكعبات الكاملة.

4.1 مكعب العدد (المكعب الكامل)

يطلق على حاصل ضرب العدد في نفسه ثلاث مرات متتالية مكعب العدد، لذا فالعدد 8 مثلا هو مكعب العدد 2 لأن $8 = 2 \times 2 \times 2$ وبالمثل فإن العدد 27 هو مكعب العدد 3 لأن $27 = 3 \times 3 \times 3$، وهكذا يمكننا القول بأن:

1, 8 , 27, 64, 125, 216, 343,…

تسمى جميعها مكعبات كاملة.

4.2 الجذر التكعيبي للمكعب الكامل

يعرف الجذر التكعيبي للعدد على أنه العدد الذي إذا ضرب بنفسه ثلاث مرات متتالية يكون ناتج الضرب هو العدد الأصلي، فمثلا نقول بأن الجذر التكعيبي للعدد 64 يساوي 4 ونكتب ذلك على الصورة:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

حيث تستخدم الإشارة $\sqrt[3]{\ }$ لتدل على أن المطلوب هو إيجاد الجذر التكعيبي للعدد المكتوب تحت الإشارة.

لذا يمكننا القول بأن:

$\sqrt[3]{27} = 3$ ، $\sqrt[3]{216} = 6$ ، $\sqrt[3]{343} = 7$ ، **وهكذا ...**

وتتلخص خطوات إيجاد الجذر التكعيبي لمكعب كامل بما يلي:

- **نحلل العدد إلى عوامله الأولية.**
- **نأخذ عاملا واحدا من كل ثلاثة من العوامل المتساوية.**
- **نجد حاصل ضرب العوامل التي أخذناها في الخطوة الثانية.**

مثال(4.1): **أوجد قيمة** $\sqrt[3]{74088}$

الحل:

نحلل أولا العدد 74088 **إلى عوامله بطريقة القسمة التحليلية كما في الشكل المجاور.**

74088	2
37044	2
18522	2
9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
	1

2 ← (2, 2, 2)
3 ← (3, 3, 3)
7 ← (7, 7, 7)

- **نأخذ عاملا واحدا من ثلاثة أعداد من العوامل المتساوية، ثم نجد حاصل ضربها.**

$$\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

ولا بد من التنويه هنا إلى أنه يكون المكعبان الكاملان متتاليين إذا كانا مكعبين لعددين طبيعيين متتاليين، فالعددان 27 , 8 **مكعبان كاملان لأنهما مكعبان للعددين** 3 , 2 **على الترتيب.**

ومن الجدير بالذكر أيضا أن الجذور التي دليلها يمثل عددا فرديا تكون معرفة على جميع الأعداد الحقيقية (R)**، وبالتالي فإن الجذور التكعيبية تكون معرفة**

على (R) **، وعلى صعيد آخر فإن الجذور التي دليلها يمثل عددا زوجيا لا تكون معرفة إلا على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة** (R^{+}) **، ومن هنا فإن الجذور التربيعية معرفة على** (R^{+}) **فقط، فمثلا:**

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt[3]{-27} = -3, \sqrt[3]{-64} = -4,......$$

مثال(4.2)**: أوجد قيمة** $\sqrt[3]{-3375}$

الحل:

- **نحلل أولا العدد** 3375 **إلى عوامله بطريقة القسمة التحليلية كما في الشكل المجاور.**

3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

(العوامل 5، 5، 5 ← 5 ؛ العوامل 3، 3، 3 ← 3)

- **نأخذ عاملا واحدا من ثلاثة أعداد من العوامل المتساوية، ثم نجد حاصل ضربها.**

$$\sqrt[3]{-3375} = -1 \times 5 \times 3 = -15$$

4.3 اكتشاف المكعبات الكاملة

يمكن الحصول على أي مكعب كامل إذا أعطي المكعب الكامل الذي قبله باستخدام القاعدة التالية:

$$a_{n+1} = a_n + 6(S_n) + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

حيث أن:

$$S_n = n + S_{n-1}$$

a_n **: المكعب الكامل الأول.**

a_{n+1} **: المكعب الكامل الذي يلي الأول.**

وعلى اعتبار أن $S_1 = 1$ **كقيمة أولية، وبأن المكعب الكامل الأول كما هو معلوم هو** 1 (**أي أن** $a_1 = 1$).

فمثلاً للحصول على كافة المكعبات الكاملة يمكننا التطبيق على العلاقة (1)

$$a_{n+1} = a_n + 6(S_n) + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

فنقول أنه:

- **عندما** $n = 1$

$$a_{1+1} = a_1 + 6(S_1) + 1$$
$$a_2 = 1 + 6(1) + 1$$
$$a_2 = 8$$

وبذلك فإن المكعب الكامل الذي يلي المكعب الكامل 1 **هو** 8**، حيث أن:** $\sqrt[3]{8} = 2$.

- **عندما** $n = 2$

نجد S_2 **حيث:**

$$S_n = n + S_{n-1}$$
$$S_2 = 2 + S_{2-1}$$
$$S_2 = 2 + S_1 = 2 + 1 = 3$$
$$\Rightarrow S_2 = 3$$

لذا:

$$a_{2+1} = a_2 + 6(S_2) + 1$$
$$a_3 = 8 + 6(3) + 1$$
$$a_3 = 27$$

لذلك فإن المكعب الكامل الذي يلي المكعب الكامل 8 **هو** 27، **حيث أن:**
$\sqrt[3]{27} = 3$.

- **عندما** $n = 3$

نجد S_3 **حيث:**

$$S_n = n + S_{n-1}$$
$$S_3 = 3 + S_{3-1}$$
$$S_3 = 3 + S_2 = 3 + 3 = 6$$
$$\Rightarrow S_3 = 6$$

لذا:

$$a_{3+1} = a_3 + 6(S_3) + 1$$
$$a_4 = 27 + 6(6) + 1$$
$$a_4 = 64$$

أيضا يتبين لنا أن المكعب الكامل الذي يلي المكعب الكامل 27 **هو** 64، **حيث أن:** $\sqrt[3]{64} = 4$.

- **عندما** $\underline{n = 4}$

نجد S_4 **حيث:**

$$S_n = n + S_{n-1}$$
$$S_4 = 4 + S_{4-1}$$
$$S_4 = 4 + S_3 = 4 + 6 = 10$$
$$\Rightarrow S_4 = 10$$

لذا:

$$a_{4+1} = a_4 + 6(S_4) + 1$$
$$a_5 = 64 + 6(10) + 1$$
$$a_5 = 125$$

ومن هنا فإن المكعب الكامل الذي يلي المكعب الكامل 64 **هو** 125، **حيث أن** $\sqrt[3]{125} = 5$.

وبإمكاننا الاستمرار هكذا لنحصل على كافة المكعبات الكاملة، ويظهر الجدول (4.1) **استخدام العلاقة رقم** (1) **في إيجاد بعض المكعبات الكاملة من** $n = 1$ **إلى** $n = 10$.

الجدول (4.1)

المكعب الكامل التالي a_{n+1}	التطبيق على العلاقة رقم (1) $a_{n+1} = a_n + 6(S_n) + 1$	قيمة S_n	المكعب الكامل المعلوم a_n	n
8	$a_2 = 1 + 6(1) + 1$	1	1	1
27	$a_3 = 8 + 6(3) + 1$	3	8	2
64	$a_4 = 27 + 6(6) + 1$	6	27	3
125	$a_5 = 64 + 6(10) + 1$	10	64	4
216	$a_6 = 125 + 6(15) + 1$	15	125	5
343	$a_7 = 216 + 6(21) + 1$	21	216	6
512	$a_8 = 343 + 6(28) + 1$	28	343	7
729	$a_9 = 512 + 6(36) + 1$	36	512	8
1000	$a_{10} = 729 + 6(45) + 1$	45	729	9
1331 : :	$a_{10} = 1000 + 6(55) + 1$: :	55	1000 : :	10 : :

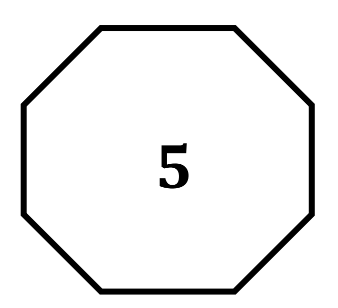
يتبين لنا مما سبق أنه بإمكاننا اكتشاف كافة مكعبات الأعداد الكاملة، وذلك من خلال استخدام العلاقة:

$$a_{n+1} = a_n + 6(S_n) + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

حيث أن: $S_n = n + S_{n-1}$

وقد آثرت في هذا السياق إلى إيرادها لكونها علاقة جديدة توصلت إليها بعد كثير من البحث والاجتهاد، وتعد من وجهة نظرية إضافة يجدر بالمتخصصين في مجال الرياضيات أخذها بعين الاعتبار.



تقريب الجذور التكعيبية باستخدام بعض الطرق

مقدمة

يمكن تعريف الأعداد التي تمثل مكعبات غير كاملة على أنها أعداد لا يكون ناتج جذورها التكعيبية أعدادا طبيعية، فمثلا:

$$2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9 , 10 , 11 , 12 ,\ldots$$

هي أعداد لا تمثل مكعبات كاملة.

وسوف نقوم باتباع نفس الطرق التي قد استعرضت مسبقا في الفصل الثاني من هذا الكتاب، حيث أننا سنقوم باستخدامها لإيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية، وهذه الطرق هي على الترتيب:

- **الطريقة التقليدية المتبعة في المناهج المدرسية.**
- **طريقة بلزانو (Belzano's Theorem).**
- **طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method).**
- **متسلسلة ذات الحدين (Binomial Series).**
- **طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method).**
- **التقريب باستخدام كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials).**

وسوف نكتفي في هذا الفصل بعرض تلك الطرق عرضا مختصرا، وتقديم عدة أمثلة توضح التطبيق على كل منها، مبينين من خلال تلك الأمثلة كيفية إيجاد قيمة تقريبية للجذر التكعيبي، إضافة إلى القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية ومربع القيمة التقريبية في كل منها.

وفيما يلي عرضا للطرق المذكورة آنفا:

5.1 الطريقة التقليدية

لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt[3]{x}$ حيث x عدد حقيقي، فإننا نعمل على حصر العدد x بين مكعبين كاملين مثل b^3 a^3 , حيث أن:

$$b^3 > x > a^3$$

$$\Rightarrow b > \sqrt[3]{x} > a$$

لذا:

كتقريب أولي $\sqrt[3]{x} \quad \frac{a+b}{2} \approx$

ومن ثم نقارن العدد X **بكل من العددين** a^3 b^3 , **من حيث القرب، لنضع في نهاية الأمر عدة تقريبات تعتمد على مدى قرب العدد** X **من العدد** b^3 **أو من العدد** a^3 .

مثال(5.1): **قدر ناتج** $\sqrt[3]{14}$.

الحل:

$$27 > 14 > 8$$

$$3 > \sqrt[3]{14} > 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{14} \approx 2.5$$

لكـن العـدد 14 **أقـرب إلـى العـدد** 8 **منـه إلـى العـدد** 27**، لـذلك فـإن** $\sqrt[3]{14}$ **تنحصر بين** 2 , 2.5 **بمعنى أن:**

$$2.1,\ 2.2,\ 2.3,\ 2.4$$

كلها قيم تقريبية له.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{14}$ 2.4101 = **لأقـرب أربـع منـازل عشـرية، وبالتـالي يمكننـا اسـتخلاص الجدول** (5.1) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا**

عليها في المثال (5.1) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.1)

مكعب القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية
9.261	0.3101	2.1
10.648	0.2101	2.2
12.167	0.1101	2.3
13.824	0.0101	2.4

مثال(5.2): **قدر ناتج** $\sqrt[3]{110}$.

الحل:

$$125 > 110 > 64$$

$$5 > \sqrt[3]{110} > 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{110} \approx 4.5$$

لكن العدد 110 **أقرب إلى العدد** 125 **منه إلى العدد** 64، **لذلك فإن** $\sqrt[3]{110}$ **تنحصر بين** 4 , 4.5 **بمعنى أن:**

4.6, 4.7, 4.8, 4.9

كلها قيم تقريبية له.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{110}$ 4.7914 = **لأقرب أربع منازل عشرية، وبالتالي يمكننا استخلاص الجدول** (5.2) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا عليها في المثال** (5.2) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.2)

مكعب القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية
97.336	0.1914	4.6
103.823	0.0914	4.7
110.592	0.0086	4.8
117.649	0.1086	4.9

مثال(5.3): **قدر ناتج** $\sqrt[3]{171}$.

الحل:

$$216 > 171 > 125$$

$$6 > \sqrt[3]{171} > 5$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{171} \approx 5.5$$

ونظرا لأن العدد 171 **يساوي تقريبا الوسط الحسابي للعددين** 125 ، 216، **لذلك فإن الأعداد التالية:**

5.4, 5.5, 5.6

تعتبر كلها قيم تقريبية لجذره التكعيبي.

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{171}$ 5.5505 = **لأقرب أربع منازل عشرية، وبالتالي يمكننا استخلاص الجدول** (5.3) **الذي يبين القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية التي حصلنا عليها في المثال** (5.3) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.3)

مكعب القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية
157.464	0.1505	5.4
166.375	0.0505	5.5

175.616	0.0495	5.6

ومن هنا، فإننا نجد أن التقريبات التي توصلنا إليها من خلال استخدام الطريقة السابقة تكون بعيدة في أغلبيتها عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي لكل من الأعداد 171 , 110 , 14 **في الأمثلة** (5.3) ,(5.2)، (5.1) **على الترتيب، ذلك أن العمود الثالث من الجدول الذي يلي كل مثال من الأمثلة السابقة يبين بوضوح ذلك البعد من خلال الفروقات الواضحة بين مكعب القيمة التقريبية التي توصلنا إليها وبين كل من الأعداد** 171 , 110 , 14.

لذا؛ سأقوم بإهمال هذه الطريقة فيما بعد، لما ينتج من خلال استخدامها من أخطاء تعد كبيرة نوعا ما، ونظرا للتشتيت والتشكيك وعدم الثقة بالإجابات المتحصّلة – وخاصة عند الطالب – وعدم ثباته عند إجابة واحدة تكون دقيقة نوعا ما.

5.2 نظرية بلزانو (Belzano's Theorem)

ذكرنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب نص نظرية بلزانو وخطوات التطبيق عليها، وسنقتصر في هذا السياق على استعراض عدة أمثلة يبين كل منها استخدام نظرية بلزانو لإيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية، عارضين القيمة

المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية ومكعب القيمة التقريبية التي سوف نتوصل إليها عبر هذه الطريقة.

وسوف أتوقف أثناء استخدام نظرية بلزانو عند التقريب الثاني على الأكثر فقط عند إيجاد قيمة تقريبية للجذر التكعيبي للعدد المطلوب.

مثال(5.4): **باستخدام نظرية بلزانو** (**Belzano's Theorem**)، **أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{14}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{14}$

$$x^3 = 14$$

$$\rightarrow \quad x^3 - 14 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) **في الخطوة السابقة؛ هو:**

$$f(x) = x^3 - 14$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (**بالتجريب**) **نجد أن:**

$$f(2) = -6 < 0$$

$$f(3) = 13 > 0$$

لذا:

$$f(2) \times f(3) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ متصل على الفترة $[2,3]$ لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.

∴ تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة $[2,3]$.

⇦ يوجد عدد مثل $c \in (2,3)$ بحيث أن $f(c) = 0$ لذا فإن التقريب الأول (r_1) هو:

$$r_1 \approx \frac{2+3}{2} = 2.5$$

وبما أن:

$$f(2.5) = (2.5)^3 - 14 = 1.625 > 0$$

وأن:

$$f(2) \times f(2.5) < 0$$

لذا فالتقريب الثاني (r_2) هو:

$$r_2 \approx \frac{2+2.5}{2} = 2.25$$

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **، لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيم بعيدة نوعا ما عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 14، ويظهر ذلك من خلال التقريبين الأول والثاني له.**

ويبين الجدول (5.4) **التالي، القيمة المطلقة للخطأ بين التقريبين اللذين توصلنا إليهما في المثال** (5.4) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt[3]{14}$.

الجدول (5.4)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مكعب القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	2.5	0.0899	15.625
التقريب الثاني r_2	2.25	0.1601	11.3906

نلاحظ أن التقريبين الأول والثاني اللذين توصلنا إليهما من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التربيعي للعدد 14، **ذلك أن مكعب قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينها وبين العدد** 14.

مثال(5.5): **باستخدام نظرية بلزانو** (**Belzano's Theorem**)، **أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{110}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{110}$

$$x^3 = 110$$

$$\rightarrow \quad x^3 - 110 = 0 \text{ .... } (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^3 - 110$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (بالتجريب) نجد أن:

$f(4) = -46 < 0$

$f(5) = 15 > 0$

لذا:

$$f(4) \times f(5) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ **متصل على الفترة** $[4,5]$ **لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.**

$\therefore$ **تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة** $[4,5]$.

⇦ **يوجد عدد مثل** $c \in (4,5)$ **بحيث أن** $f(c) = 0$ **لذا فإن التقريب الأول (** r_1 **) هو:**

$$r_1 \approx \frac{4+5}{2} = 4.5$$

وبما أن:

$$f(4.5) = (4.5)^3 - 110 = -18.875 < 0$$

وأن:

$$f(4.5) \times f(5) < 0$$

لذا فالتقريب الثاني (r_2) هو:

$$r_2 \approx \frac{4.5+5}{2} = 4.75$$

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{110} = 4.7914$ ، **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيم بعيدة نوعا ما عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110**، ويظهر ذلك من خلال التقريبين الأول والثاني له.**

ويبين الجدول (5.5) **التالي، القيمة المطلقة للخطأ بين التقريبين اللذين توصلنا إليهما في المثال** (5.5) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt[3]{110}$.

الجدول (5.5)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مكعب القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	4.5	0.2914	91.125
التقريب الثاني r_2	4.75	0.0414	107.1719

نلاحظ أن التقريبين الأول والثاني اللذين توصلنا إليهما من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 110، **ذلك أن مكعب قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينها وبين العدد** 110.

مثال(5.6): **باستخدام نظرية بلزانو** (**Belzano's Theorem**)، **أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{171}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{171}$

$$x^3 = 171$$

$$\rightarrow \quad x^3 - 171 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) **في الخطوة السابقة؛ هو:**

$$f(x) = x^3 - 171$$

والآن نبحث عن فترة تتحقق فيها شروط نظرية بلزانو (بالتجريب) نجد أن:

$f(5) = -46 < 0$

$f(6) = 45 > 0$

لذا:

$$f(5) \times f(6) < 0$$

وحيث أن $f(x)$ **متصل على الفترة** $[5,6]$ **لأنه كثير حدود من الدرجة الثانية.**

$\therefore$ **تتحقق شروط نظرية بلزانو على الفترة** $[5,6]$.

⇦ **يوجد عدد مثل** $c \in (5,6)$ **بحيث أن** $f(c) = 0$ **لذا فإن التقريب الأول (** r_1 **) هو:**

$$r_1 \approx \frac{5+6}{2} = 5.5$$

ولكن وباستخدام الآلة الحاسبة فإننا نجد أن:

$\sqrt[3]{171} = 5.5505$ **، لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة إلى أنه باستخدام نظرية بلزانو يمكننا إيجاد قيمة بعيدة عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171**، ويظهر ذلك من خلال التقريب الأول له.**

ويبين الجدول (5.6) **التالي، القيمة المطلقة للخطأ بين التقريب الذي توصلنا إليه في المثال** (5.6) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة لـ** $\sqrt[3]{171}$.

الجدول (5.6)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مكعب القيمة التقريبية
التقريب الأول r_1	5.5	0.0505	166.375

نلاحظ أن التقريب الأول الذي توصلنا إليه من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 171، ذلك أن مكعب قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد 171.

وبشكل عام فإن استخدام نظرية بلزانو لإيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية لا يعطي قيما قريبة من القيم الحقيقية لتلك الجذور، وهذا ما أظهرته لنا الأمثلة (5.6)، (5.5) ، (5.4) السابقة على الترتيب، حيث أن القيم التقريبية التي توصلنا إليها من تلك الأمثلة من خلال استخدام نظرية بلزانو بعيدة عن القيم الحقيقية للجذور التكعيبية في كل منها، كما ونلاحظ أن هذه النظرية غير مناسبة لأن تعطى للطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية؛ لما تتطلبه من معرفتهم بمفاهيم قد تكون مستحيلة الفهم وصعبة جدا عليهم، كمعرفتهم بمفهومي الاقتران والاتصال واتقانهم للشروط الواجب توافرها لتطبيق هذه النظرية إلى غيرها من الأمور الأخرى، وبالتالي فإنني سأقوم باستبعاد هذه الطريقة فيما بعد، لما ينتج من جراء التطبيق عليها من أخطاء تعد كبيرة نوعا ما.

5.3 طريقة نيوتن-رافسون

(Newton-Raphson's Method)

مر معنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب صيغة نيوتن–رافسون الرياضية التي تستخدم لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ والقريب من قيمة معينة، ومن إحدى التطبيقات الكثيرة على هذه الصيغة هو إيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية، وبالتالي فإن صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

يمكن الاستفادة منها لإيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية وذلك باعتبار x_0 هي قيمة تقريبية مبدأية (أولية) لجذر المعادلة $f(x)=0$ ، وباعتبار:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$

هي كلها قيم تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$.

وسوف أتوقف أثناء استخدام طريقة نيوتن–رافسون عند التقريب الثالث على الأكثر فقط (x_2) عند إيجاد قيمة تقريبية للجذر التكعيبي للعدد المطلوب.

مثال(5.7): **باستخدام طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method)، أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{14}$.**

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{14}$

$$x^3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 14 = 0 \quad \text{........} \; (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^3 - 14$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيار القيمة التقريبية المبدئية $x_0 = 2$ **، نجد أن التقريب الثاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^3 - 14}{3x_0^2}$$

$$x_1 \approx 2 - \frac{8 - 14}{3(2)^2}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 2 - \frac{-6}{12} = 2.5$$

$$x_1 \approx 2.5$$

والتقريب الثالث x_2 **هو:**

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^3 - 14}{3x_1^2}$$

$$x_2 \approx 2.5 - \frac{(2.5)^3 - 14}{\;}$$

$x_2 \approx 2.4133$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 14 **ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2.

ويبين الجدول (5.7) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (5.7) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.7)

مكعب القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	القيمة التقريبية	درجة التقريب

التقريب الأول x_0	2	0.4101	8
التقريب الثاني x_1	2.5	0.0899	15.625
التقريب الثالث x_2	2.4133	0.0032	14.0551

نلاحظ أن التقريب الأول (المفترض x_0) والتقريب الثاني (x_1) بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 14**، ذلك أن مكعب قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينهما وبين العدد** 14**، أما التقريب الثالث (x_2) الذي توصلنا إليه من خلال استخدام طريقة نيوتن–رافسون فإنه يعد تقريبا ممتازا إذا ما قورن بالقيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 14.

مثال(5.8)**: باستخدام طريقة نيوتن–رافسون (Newton-Raphson's Method)، أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{110}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{110}$

$$x^3 = 110$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 110 = 0 \quad \ldots\ldots.. (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^3 - 110$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

وباستخدام صيغة نيوتن–رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيـار القيمـة التقريبيـة المبدئيـة $x_0 = 5$ **، نجـد أن التقريـب الثـاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^3 - 110}{3x_0^2}$$

$$x_1 \approx 5 - \frac{(5)^3 - 110}{3(5)^2}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 5 - \frac{15}{75} = 4.8$$

$$x_1 \approx 4.8$$

والتقريب الثالث x_2 **هو:**

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^3 - 110}{3x_1^2}$$

$$x_2 \approx 4.8 - \frac{(4.8)^3 - 110}{3(4.8)^2}$$

$$x_2 \approx 4.8 - \frac{0.592}{69.12} = 4.7914$$

$$x_2 \approx 4.7914$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{110} = 4.7914$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110 **ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2 .

ويبين الجدول (5.8) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (5.8) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.8)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مكعب القيمة التقريبية
التقريب الأول x_0	5	0.2086	125
التقريب الثاني x_1	4.8	0.0086	110.592
التقريب الثالث x_2	4.7914	0.0000	110

نلاحظ أن التقريب الأول x_0 (**المفترض**) **بعيد عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110، **ذلك أن مكعب قيمته التقريبية تظهر فرقا واضحا بينه وبين العدد** 110، **لكن التقريبين الثاني والثالث** (x_2 ، x_1) **يعدان تقريبين ممتازين إذا ما قورنا بالقيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110.

مثال(5.9): **باستخدام طريقة نيوتن–رافسون** (**Newton-Raphson's Method**)، **أوجد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{171}$.

الحل:

نضع $x = \sqrt[3]{171}$

$$x^3 = 171$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 171 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

الاقتران المرافق للمعادلة (*) في الخطوة السابقة؛ هو:

$$f(x) = x^3 - 171$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

وباستخدام صيغة نيوتن-رافسون التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وباختيار القيمة التقريبية المبدئية $x_0 = 6$ **، نجد أن التقريب الثاني** x_1 **هو:**

$$x_1 \approx x_0 - \frac{x_0^3 - 171}{3x_0^2}$$

$$x_1 \approx 6 - \frac{(6)^3 - 171}{3(6)^2}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 6 - \frac{45}{108} = 5.5833$$

$$x_1 \approx 5.5833$$

والتقريب الثالث x_2 هو:

$$x_2 \approx x_1 - \frac{x_1^3 - 171}{3x_1^2}$$

$$x_2 \approx 5.5833 - \frac{(5.5833)^3 - 171}{3(5.5833)^2}$$

$$x_2 \approx 5.5833 - \frac{3.0485}{93.5197} = 5.5507$$

$$x_2 \approx 5.5507$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{171} = 5.5505$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة نيوتن-رافسون يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171 **ويظهر ذلك من خلال التقريب الثالث له** x_2 .

ويبين الجدول (5.9) **القيمة المطلقة بين التقريبات الثلاثة التي توصلنا إليها في المثال** (5.9) **وبين القيمة الحقيقية التي توصلنا إليها باستخدام الآلة الحاسبة.**

الجدول (5.9)

درجة التقريب	القيمة التقريبية	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية	مكعب القيمة التقريبية
التقريب الأول x_0	6	0.4495	216
التقريب الثاني x_1	5.5833	0.0328	174.0495
التقريب الثالث x_2	5.5507	0.0002	171.0186

نلاحظ أن التقريب الأول (**المفترض** x_0) **والتقريب الثاني** (x_1) **بعيدان عن القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171، **ذلك أن مكعب قيمهما التقريبية تظهر فرقا واضحا بينهما وبين العدد** 171، **أما التقريب الثالث** (x_2) **الذي توصلنا إليه من خلال استخدام طريقة نيوتن–رافسون فإنه يعد تقريبا ممتازا إذا ما قورن بالقيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171.

مما سبق نجد أنه وباستخدام طريقة نيوتن–رافسون فإننا نتوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، ولكن ومن وجهة نظري فإن أمر اختيار التقريب الأولي x_0 **قد يسبب بعض الإرباك في بداية استخدام هذه**

الطريقة من قبل المتعلم (كما هو الحال لدى اختيارنا له عند إيجاد قيم تقريبية للجذور التربيعية)، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد اللذان يتطلبانه تعويض كل من التقريبين الأول والثاني في صيغة نيوتن–رافسون في كل مرة منها.
كما أن أمر معرفة الطلاب الذين هم في المرحلة الأساسية بمفهومي الاقتران والاشتقاق وحتى في عملية التعويض لأكثر من مرة، قد يشكل عائقا ضد استخدام هذه الطريقة في مرحلتهم الأساسية تلك.

5.4 متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series)

في هذا القسم سوف نستخدم متسلسلة ذات الحدين في تقريب الجذور التكعيبية التي مر استخدامنا لها في الفصل الثاني من هذا الكتاب في تقريب الجذور التربيعية، وكما مر معنا سابقا فإننا سوف نبدأ بأخذ الحدين $1+x$، وباعتبار أن α عدد حقيقي بحيث أن $\alpha \neq 0$ ، وأن شكل الاقتران هو:

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

فإذا كانت $\alpha > 0$ ، فإننا سوف نستخدم الصيغة (1) أدناه لتقريب الجذر التكعيبي.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots(1)$$

وإذا كانت $0 < \alpha$ ، فإننا نستخدم الصيغة (2) **أدناه لتقريب الجذر التكعيبي.**

$$(1-x)^{\alpha} = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+.......(2)$$

وقد مر معنا سابقا خطوات التطبيق على متسلسلة ذات الحدين في تقريب الجذور، وسوف نقوم باستخدام أول أربعة حدود فقط من المتسلسلتين (2),(1) **آنفتا الذكر، وذلك لأن استخدام تلك الحدود فقط تكفي لأن تعطي قيما قريبة من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية.**

مثال (5.10): **قدر قيمة $\sqrt[3]{14}$ باستخدام أول أربعة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt[3]{14} = (8+6)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{14} = (8(1+\frac{6}{8}))^{\frac{1}{3}} = 2(1+\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$$

وبتطبيق المقدار $(1+\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$ على الصيغة (1) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt[3]{14} \approx 2(1+\frac{1}{3}(\frac{3}{4})+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(\frac{3}{4})^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(\frac{3}{4})^3)$$

$$\sqrt[3]{14} \approx 2(1+\frac{1}{4}-(\frac{1}{9})(\frac{9}{16})+\frac{10}{(6)(27)}(\frac{27}{64}))$$

$$\sqrt[3]{14} \approx 2(\frac{5}{4}-\frac{1}{16}+\frac{5}{192}) = 2(\frac{19}{16}+\frac{5}{192})$$

$$= 2(\frac{233}{192}) = \frac{233}{96} = 2.4271$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{14} \approx 2.4271$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 14**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي** 0.017**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 14.2976.

مثال (5.11)**: قدر قيمة** $\sqrt[3]{110}$ **باستخدام أول أربعة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt[3]{110}=(125-15)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{110}=(125(1-\frac{15}{125}))^{\frac{1}{3}}=5(1-\frac{3}{25})^{\frac{1}{3}}$$

وبتطبيق المقدار $(1-\frac{3}{25})^{\frac{1}{3}}$ **على الصيغة** (2) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt[3]{110}\approx 5(1-\frac{1}{3}(\frac{3}{25})+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(\frac{3}{25})^{2}-\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(\frac{3}{25})^{3})$$

$$\sqrt[3]{110}\approx 5(1-\frac{1}{25}-(\frac{1}{9})(\frac{9}{625})-\frac{10}{(6)(27)}(\frac{27}{15625}))$$

$$\sqrt[3]{110}\approx 5(\frac{24}{25}-\frac{1}{625}-\frac{1}{9375})=5(\frac{599}{625}-\frac{1}{9375})$$

$$=5(\frac{8984}{9375})=\frac{8984}{1875}=4.7915$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{110}\approx 4.7915$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{110}=4.7914$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة**

الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 110، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي** 0.0001، **وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 110.0055.

مثال (5.12): **قدر قيمة** $\sqrt[3]{171}$ **باستخدام أول أربعة حدود من متسلسلة ذات الحدين.**

الحل:

$$\sqrt[3]{171} = (216-45)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{171} = (216(1-\frac{45}{216}))^{\frac{1}{3}} = 6(1-\frac{5}{24})^{\frac{1}{3}}$$

وبتطبيق المقدار $(1-\frac{5}{24})^{\frac{1}{3}}$ **على الصيغة** (2) **من متسلسلة ذات الحدين، فإن:**

$$\sqrt[3]{171} \approx 6(1-\frac{1}{3}(\frac{5}{24})+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(\frac{5}{24})^{2}-\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(\frac{5}{24})^{3})$$

$$\sqrt[3]{171} \approx 6(1-\frac{5}{72}-(\frac{1}{9})(\frac{25}{576})-\frac{10}{(6)(27)}(\frac{125}{13824}))$$

$$\sqrt[3]{171} \approx 6(\frac{67}{72}-\frac{25}{5184}-\frac{625}{1119744}) = 6(\frac{4799}{5184}-\frac{625}{1119744})$$

$$= 6(\frac{1035959}{1119744}) = \frac{1035959}{186624} = 5.551$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{171} \approx 5.551$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{171} = 5.5505$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين يمكننا إيجاد قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية هي** 0.0005**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 171.0463.

مما سبق، نجد أنه وباستخدام متسلسلة ذات الحدين فإنه يمكننا التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، ولكن أمر معرفة الطلاب بمفهومي الاقترانات والمتسلسلات، وأمر التطبيق عليهما لهما أمران يفوقان مستوياتهم التعليمية، هذا بالإضافة إلى الوقت والجهد الذي تتطلبه عملية التعويض في المتسلسلة نفسها.

5.5 طريقة التقريب الخطي

(Linear Approximation Method)

استعرضنا فيما سبق استخدام طريقة التقريب الخطي في إيجاد قيم تقريبية للجذور التربيعية، وسوف نستعرض في هذا القسم استخدامها في إيجاد قيم تقريبية للجذور التكعيبية، وكما تعلمنا سابقا فإن العلاقة:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h.........*$$

يطلق عليها "التقريب الخطي للاقتران f "، حيث أنه وبالتطبيق على هذه العلاقة فإننا نتوصل إلى قيم قريبة من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، حيث أن $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، وحيث أن h تمثل قيمة قليلة بحيث أنها لا تساوي الصفر ($h \neq 0$).

وسوف نستعرض الآن عدة أمثلة تبين كيفية استخدام طرقة التقريب الخطي للوصول إلى قيم تقريبية للجذور التكعيبية، وذلك بناء على الخطوات نفسها التي اتبعناها للوصول إلى قيم تقريبية للجذور التربيعية المذكورة في الفصل الثاني من هذا الكتاب.

مثال (5.13): قدر قيمة $\sqrt[3]{14}$ باستخدام طريقة التقريب الخطي.

الحل:

نفرض أن: $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 14 **هو العدد** 8.

$$x+h=8+6$$

حيث أن: $h=6$

والآن نطبق على العلاقة (*) حيث:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h.........*$$

$$f(8+6)=f(8)+f'(8)(6)$$

$$f(14)\approx\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}}(6)$$

$$f(14)\approx 2+\frac{1}{(3)(4)}(6)=2+\frac{1}{2}=2.5$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{14}\approx 2.5$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة نوعا ما من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 14**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt[3]{14}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0899**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 15.625.

مثال (5.14)**: قدر قيمة** $\sqrt[3]{110}$ **باستخدام طريقة التقريب الخطي.**

الحل:

نفرض أن: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 110 **هو العدد** 125.

$$x + h = 125 + -15$$

حيث أن: $h = -15$

والآن نطبق على العلاقة (*) **حيث:**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h ....*$$

$$f(125 + -15) = f(125) + f'(125)(-15)$$

$$f(110) \approx \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(125)^2}}(-15)$$

$$f(110) \approx 5 - \frac{1}{(3)(25)}(15) = 5 - \frac{1}{5} = 4.8$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{110} \approx 4.8$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{110} = 4.7914$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt[3]{110}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0086**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 110.592.

مثال (5.15)**: قدر قيمة** $\sqrt[3]{171}$ **باستخدام طريقة التقريب الخطي.**

الحل:

نفرض أن: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 171 **هو العدد** 216.

$$x + h = 216 + -45$$

حيث أن: $h=-45$

والآن نطبق على العلاقة (*) حيث:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h.........*$$
$$f(216+-45)=f(216)+f'(216)(-45)$$

$$f(171)\approx\sqrt[3]{216}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(216)^2}}(-45)$$

$$f(171)\approx 6-\frac{1}{(3)(36)}(45)=6-\frac{5}{12}=5.5833$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{171}\approx 5.5833$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{171}=5.5505$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي يمكننا إيجاد قيمة قريبة نوعا ما من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt[3]{171}$

والقيمة الحقيقية له تساوي 0.0328، وأن مكعب القيمة التقريبية هو 174.0495.

مع ملاحظة أنه كلما زادت قيمة h قلت الدقة في إيجاد القيمة التقريبية للجذر التكعيبي للعدد المطلوب، وكلما كانت h صغيرة فإن الدقة في القيمة التقريبية للجذر التكعيبي للعدد المطلوب تكون أفضل عند استخدام طريقة التقريب الخطي (Linear Approximation Method).

مما سبق، نجد أنه وباستخدام طريقة التقريب الخطي فإنه يمكننا التوصل إلى قيم قريبة من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، ولكن أمر معرفة المتعلمين بمفاهيم مثل مفهوم الاقتران والاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق يشكل صعوبة في التطبيق عليها، كما أنها تتطلب أن تكون h قيمة صغيرة (بحيث لا تساوي الصفر)، حتى نتوصل إلى قيم تقريبية تكون قريبة من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية.

5.6 كثير حدود تايلور (Taylor Polynomials)

تعرفنا سابقا على كثير حدود تايلور ذي القوة n للاقتران f لـ $x-a$ ، حيث أن:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

وقد قمنا بالتطبيق عليه للوصول إلى قيم تقريبية للجذور التربيعية، أما في هذا الجزء فإننا سوف نقوم بالتطبيق عليه للوصول إلى قيم تقريبية للجذور التكعيبية (**مع ملاحظة أننا سوف نقوم بأخذ أول ثلاثة حدود فقط من كثير حدود تايلور عند التطبيق عليه**).

مثال (5.16): **استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{14}$.

الحل:

نفرض أن: $x = 14$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 14 **هو** 8.

لذا:

$$x - a = 14 - 8 = 6$$

الآن نفرض أن:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(14) = f(8) + f'(8)(6) + \frac{f''(8)}{2!}(6)^2$$

$$P_n(14) \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(6) + \frac{\frac{-2}{9\sqrt[3]{8^5}}}{2}(36)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{19}{8} = 2.375$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{14} \approx 2.375$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه $\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة نوعا ما من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 14، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt[3]{14}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0351، **وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 13.3965.

مثال (5.17): **استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{110}$.

الحل: نفرض أن: $x = 110$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 110 **هو** 125.

لذا:

$$x - a = 110 - 125 = -15$$

الآن نفرض أن:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(110) = f(125) + f'(125)(-15) + \frac{f''(125)}{2!}(-15)^2$$

$$P_n(110) \approx \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(125)^2}}(-15) + \frac{\frac{-2}{9\sqrt[3]{(125)^5}}}{2}(225)$$

$$= 5 - \frac{1}{5} - \frac{3}{625} = \frac{2997}{625} = 4.7952$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{110} \approx 4.7952$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{110} = 4.7914$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 110**، حيث أن القيمة المطلقة للخطأ**

بـين القيمـة التقريبيـة التـي توصـلنا إليهـا مـن خـلال اسـتخدام هـذه الطريقـة لـ $\sqrt[3]{110}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0038، **وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 110.2606.

مثال (5.18): **استخدم كثير حدود تايلور في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{171}$.

الحل:

نفرض أن: $x = 171$

المكعب الكامل الأقرب إلى العدد 171 **هو** 216.

لذا:

$$x - a = 171 - 216 = -45$$

الآن نفرض أن:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

نطبق الآن على كثير حدود تايلور، حيث:

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$

$$...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(171)=f(216)+f'(216)(-45)+\frac{f''(216)}{2!}(-45)^2$$

$$P_n(171)\approx\sqrt[3]{216}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(216)^2}}(-45)+\frac{\frac{-2}{9\sqrt[3]{(216)^5}}}{2}(2025)$$

$$=6-\frac{5}{12}-\frac{25}{864}=\frac{4799}{864}=5.5544$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{171} \approx 5.5544$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

$\sqrt[3]{171} = 5.5505$ **لأقرب أربع منازل عشرية، لذا يمكننا ملاحظة أنه وباستخدام التقريب باستخدام كثير حدود تايلور يمكننا إيجاد قيمة قريبة من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد** 171، **حيث أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها من خلال استخدام هذه الطريقة لـ** $\sqrt[3]{171}$ **والقيمة الحقيقية له تساوي** 0.0039، **وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 171.3608.

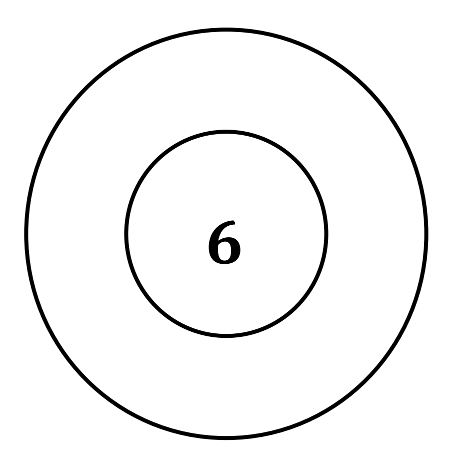
مما سبق، نجد أنه وباستخدام طريقة التقريب من خلال كثير حدود تايلور فإننا نتوصل إلى قيم قريبة من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، ولكنني أرى أن أمر معرفة المتعلمين بمفهوم الاقتران ومفهوم المتسلسلات والاشتقاق وقابلية الاقتران للاشتقاق وحتى بمفهوم كثير الحدود يشكل صعوبة في التطبيق على هذه الطريقة.

وبشكل عام، فإن التقريبات للجذور التكعيبية التي توصلنا إليها باستخدام الطريقة التقليدية ونظرية بلزانو بعيدة عن القيم الحقيقية لتلك الجذور؛ لذلك سنقوم في الفصل القادم باستبعادهما عند مقارنة التقريبات الناتجة من استخدام

بقية الطرق، حيث أنني سأقوم في الفصل السادس باعتماد الطرق أدناه للمقارنة بين التقريبات الناتجة عن كل طريقة للجذور التكعيبية، وهذه الطرق هي:

- **طريقة نيوتن–رافسون.**
- **متسلسلة ذات الحدين.**
- **طريقة التقريب الخطي.**
- **كثير حدود تايلور.**

هذا بالإضافة إلى طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التكعيبية، نظرا للتقريبات الجيدة الناتجة عن كل طريقة من الطرق السابقة.



طريقة الحصر

(Restriction Method)

لتقريب الجذور التكعيبية

6.1 طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية (Restriction Method)

تستند طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية على أسلوب حصر العدد المطلوب إيجاد جذره التكعيبي بين مكعبين كاملين متتاليين، كما هو الحال في طريقة الحصر لتقريب الجذور التربيعية والتي تم ذكرها في الفصل الثالث من هذا الكتاب، وقد قمت باعتبار أن الوسط الحسابي لناتجي الجذرين التكعيبيين للمكعبين الكاملين المتتاليين هو تقريب أولي للجذر التكعيبي للعدد المطلوب.

أي أنه إذا كان a^3 ، b^3 مكعبين كاملين متتاليين، وكانت x تقع بينهما فإن:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{a+b}{2}$$

هو أول تقريب للعدد $\sqrt[3]{x}$.

وسوف نقوم باستخدام أحد قوانين التناسب في اشتقاق طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التكعيبية، وهو أنه:

إذا كان: $\frac{A}{B} = r$ وكان: $\frac{C}{D} = r$

فإن:

$$\frac{A+C}{B+D}=r$$

ولاشتقاق طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التكعيبية، نبـدأ أولا بأخـذ الفـرق بـين نـاتجي الجـذرين التكعيبيـين للمكعبـين الكـاملين المتتاليين.

حيث أننا نعلم أن:

$$a-b=1$$

حيث a,b **هما ناتجا الجذرين للمكعبين الكاملين المتتاليين.**

$$(a-b)^2=1$$

$$a^2-2ab+b^2=1$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=2ab+1$$

بإضافة المقدار a^2+b^2 **للطرفين، فإن:**

$$2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2+1$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2)=(a+b)^2+1$$

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$a^2+b^2=(a+b)\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2(a+b)}\right)$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2(a+b)}$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{1}{2(a+b)}$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{2a^2+2b^2-1}{2(a+b)}$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{2}}{a+b}$$

لذا يمكننا القول أيضا أن:

$$\frac{a+b}{2} \approx \frac{a^2+b^2}{a+b} \text{..............................} (1)$$

كذلك، وبالرجوع إلى أن الفرق بين ناتجي الجذرين التكعيبيين للمكعبين الكاملين المتتاليين يساوي واحدا مرة أخرى:

أي أن:

$$a-b=1$$
$$(a-b)^2=1$$
$$a^2-2ab+b^2=1$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=2ab+1$$
$$a^2+b^2=2(ab+\frac{1}{2})$$
$$\frac{a^2+b^2}{2}=ab+\frac{1}{2}$$

وباعتبار أن:

$$\frac{a^2}{2}=a^2-\frac{a^2}{2} \quad ، \quad \frac{b^2}{2}=b^2-\frac{b^2}{2}$$

$$a^2-\frac{a^2}{2}+b^2-\frac{b^2}{2}=ab+\frac{1}{2}$$

$$a^2+b^2-ab=\frac{a^2+b^2+1}{2}$$

وبضرب الطرفين بالمقدار $(a+b)$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=\frac{(a+b)(a^2+b^2+1)}{2}$$

$$(a^3+b^3)=\frac{(a+b)(a^2+b^2+1)}{2}$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+1}\text{..............................}(2)$$

وبالعودة إلى افتراضنا المبدئي أن:

$$\sqrt[3]{x}\approx\frac{a+b}{2}$$

فإن:

$$x\approx\frac{(a+b)^3}{8}$$

$$x\approx\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}$$

$$8x \approx a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$8x \approx (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)$$

$$8x \approx (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3ab)$$

$$8x \approx (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$x \approx \frac{(a+b)^3}{8}$$

$$\frac{4x}{(a+b)^2} \approx \frac{a+b}{2}$$

وبما أن:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{a+b}{2}$$

فإن:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{4x}{(a+b)^2}$$

وبضرب كل من بسط الثاني ومقامه بالعدد $\frac{1}{4}$ **فإن:**

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x}{\frac{(a+b)^2}{4}}$$

لذا يمكننا القول بأن:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x}{\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]} \text{..........(3)}$$

وبتطبيق العلاقة (1) **والعلاقة** (2) **والعلاقة** (3) **على قانون التناسب المذكور آنفا، فإن:**

$$\frac{a^2+b^2+a^3+b^3+x}{a+b+a^2+b^2+1+\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]} \approx \sqrt[3]{x}$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x+a^3+b^3+a^2+b^2}{\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]+a^2+b^2+a+b+1} \text{........(*)}$$

وللحصول على قيمة أكثر قربا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد x **فإننا سوف نطرح من البسط في المعادلة السابقة المقدار:**

$$\frac{b^3 - x}{(x-a^3) + \frac{a+b+1}{2}}$$

لتصبح المعادلة (*) بشكلها النهائي كما يلي:

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - \left(\frac{b^3 - x}{(x-a^3) + \frac{a+b+1}{2}}\right)}{\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right] + a^2 + b^2 + a + b + 1} \quad ...(*)$$

حيث أن العلاقة (*) تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية.

ويمكن التطبيق على طريقة الحصر (Restriction Method) في إيجاد قيمة تقريبية للجذر التكعيبي للعدد الحقيقي وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:

- **نقوم بداية بحصر العدد x بين مكعبين كاملين متتاليين، حيث:**

$$b^3 > x > a^3$$

- **نجد ناتجي الجذرين التكعيبين** a,b **للمكعبين الكاملين المتتاليين** a^3,b^3 ، **حيث أن:**

$$b^3 > \sqrt[3]{x} > a^3$$

- **نطبق على العلاقة التالية:**

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - \left(\dfrac{b^3 - x}{(x - a^3) + \dfrac{a+b+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4}\right] + a^2 + b^2 + a + b + 1} \quad ...(*)$$

لنحصل في نهاية الأمر على قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية لـ $\sqrt[3]{x}$.

مثال(6.1): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{14}$.

الحل:

$$27 > x > 8$$

$$> \sqrt[3]{14} > 2 \quad 3$$

والآن نطبق على العلاقة (*) **التالية:**

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - \left(\dfrac{b^3 - x}{(x - a^3) + \dfrac{a+b+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4}\right] + a^2 + b^2 + a + b + 1} \quad ...(*)$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{14} \approx \frac{14 + 8 + 27 + 4 + 9 - \left(\dfrac{27 - 14}{(14 - 8) + \dfrac{2+3+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(2+3)^2}{4}\right] + 4 + 9 + 2 + 3 + 1}$$

$$\sqrt[3]{14} \approx \frac{62 - \left(\dfrac{13}{6+3}\right)}{[6.25] + 19} = \frac{62 - \dfrac{13}{9}}{25} = 2.4222$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{14} \approx 2.4222$$

نلاحظ أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 14 ، **ذلك أنه وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد أن** $\sqrt[3]{14} = 2.4101$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي** (0.0121)**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 14.2112.

مثال(6.2): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{110}$.

الحل:

$$125 > x > 64$$

$$> \sqrt[3]{110} > 4 \quad 5$$

والآن نطبق على العلاقة (*) **التالية:**

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - \left(\dfrac{b^3 - x}{(x - a^3) + \dfrac{a+b+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4}\right] + a^2 + b^2 + a + b + 1} \ldots(*)$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{110} \approx \frac{110+64+125+16+25-\left(\dfrac{125-110}{(110-64)+\dfrac{4+5+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(4+5)^2}{4}\right]+16+25+4+5+1}$$

$$\sqrt[3]{110} \approx \frac{340-\left(\dfrac{15}{46+5}\right)}{[20.25]+51}$$

$$=\frac{340-\dfrac{15}{51}}{71}=4.7846$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{110} \approx 4.7846$$

ونلاحظ هنا أيضا أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 110 ، **ذلك أنه وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد أن** $\sqrt[3]{110}=4.7914$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها**

باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي (0.0068)، **وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 109.531.

مثال(6.3): **استخدم طريقة الحصر في إيجاد قيمة تقريبية للعدد** $\sqrt[3]{171}$.

الحل:

$$216 > x > 125$$

$$6 > \sqrt[3]{171} > 5$$

والآن نطبق على العلاقة (*) **التالية:**

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{x + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - \left(\dfrac{b^3 - x}{(x - a^3) + \dfrac{a+b+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4}\right] + a^2 + b^2 + a + b + 1} \quad ...(*)$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{171} \approx \frac{171 + 125 + 216 + 25 + 36 - \left(\dfrac{216 - 171}{(171 - 125) + \dfrac{5+6+1}{2}}\right)}{\left[\dfrac{(5+6)^2}{4}\right] + 25 + 36 + 5 + 6 + 1}$$

$$\sqrt[3]{171} \approx \frac{573-(\frac{45}{46+6})}{[30.25]+73}$$

$$=\frac{573-\frac{45}{52}}{103}=5.5547$$

أي أن:

$$\sqrt[3]{171} \approx 5.5547$$

كما نلاحظ أن القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام هذه الطريقة أيضا هي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد 171 ، **ذلك أنه وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد أن** $\sqrt[3]{171}=5.5505$ **لأقرب أربع منازل عشرية، وأن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية التي توصلنا إليها باستخدام طريقة الحصر والقيمة الحقيقية يساوي** (0.0042)**، وأن مكعب القيمة التقريبية هو** 171.3886.

مما يعني أن طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التكعيبية يؤدي التطبيق عليها إلى التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، وذلك نظرا للنتائج الجيدة التي توصلنا إليها من الأمثلة (6.1)، (6.2)، (6.3) **السابقة، حيث أظهر استخدام هذه الطريقة (طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية) خلوها من مفاهيم معقدة بعض الشيء للطلاب غير المتخصصين في مجال الرياضيات كمفهوم الاقتران مثلا ومفهوم**

المتسلسلات إلى مفهوم الاشتقاق وغيرها من المفاهيم الأخرى والتي نجدها من ركائز الطرق الأخرى سابقة الذكر، كما أن أمر التطبيق عليها من قبل المتعلمين بكافة مراحلهم هو أمر ممكن بالرغم من صعوبة التعويض فيها بعض الشيء، ومن هنا، فإنني أرى أن ينظر المتخصصون والقائمون على إعداد المناهج المدرسية بعين الاعتبار إلى طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التكعيبية.

6.2 استخدام طريقة الحصر (Restriction Method) في تقريب بعض الجذور التكعيبية

والآن سوف نستعرض من خلال الجدول (6.1) عدة أمثلة محلولة تظهر استخدام طريقة الحصر في تقريب الجذور التكعيبية لأعداد مختارة عشوائيا، كما وتظهر أيضا القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية والقيم الحقيقية ومكعب القيم التقريبية في كل منها.

الجدول(6.1)

الجذر التكعيبي لـ X	المكعبان الكاملان (a^3, b^3)	جذرا المكعبين (a,b)	مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	مكعب القيمة التقريبية

الجذر التكعيبي لـ X	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{6}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(1 , 8)	(1 , 8)
جذرا المكعبين (a,b)	(1 , 2)	(1 , 2)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(1 , 4)	(1 , 4)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	2+1+8+1+4-(8-2/(2-1+(1+2+1/2))) [(1+2)²/4]+1+4+1+2+	6+1+8+1+4-(8-6/(6-1+(1+2+1/2))) [(1+2)²/4]+1+4+1+2+1
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	1.2727	1.7922
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	1.2599	1.8171
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0128	0.0249
مكعب القيمة التقريبية	2.0615	5.7565

الجذر التكعيبي لـ X	$\sqrt[3]{13}$	$\sqrt[3]{22}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(8 , 27)	(8 , 27)
جذرا المكعبين (a,b)	(2 , 3)	(2 , 3)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(4 , 9)	(4 , 9)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{13+8+27+4+9-(27-13/(13-8+(2+3+1/2)))}{[(2+3)^2/4]+4+9+2+3+1}$	$\frac{22+8+27+4+9-(27-22/(22-8+(2+3+1/2)))}{[(2+3)^2/4]+4+9+2+3+1}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	2.37	2.7882
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	2.3513	2.802
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0187	0.0138
مكعب القيمة التقريبية	13.3121	21.6756

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{28}$	$\sqrt[3]{45}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(27 , 64)	(27 , 64)
جذرا المكعبين (a,b)	(3 , 4)	(3 , 4)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(9 , 16)	(9 , 16)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{28+27+64+9+16-(64-28/(28-27+(3+4+1/2)))}{[(3+4)^2/4]+9+16+3+4+1}$	$\frac{45+27+64+9+16-(64-45/(45-27+(3+4+1/2)))}{[(3+4)^2/4]+9+16+3+4+1}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	3.04	3.5586
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	3.0366	3.5569
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0034	0.0017
مكعب القيمة التقريبية	28.0945	45.0648

$\sqrt[3]{60}$	الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{70}$
(27 , 64)	المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(64 , 125)
(3 , 4)	جذرا المكعبين (a,b)	(4 , 5)
(9 , 16)	مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(16 , 25)
$\frac{60+27+64+9+16-(64-60/(60-27+(3+4+1/2)))}{[(3+4)^2/4]+9+16+3+4+1}$	التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{70+64+125+16+25-(125-70/(70-64+(4+5+1/2)))}{[(4+5)^2/4]+16+25+4+5+1}$
3.9087	القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	4.1549
3.9149	القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	4.1213
0.0062	القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0336
59.7169	مكعب القيمة التقريبية	71.7268

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{97}$	$\sqrt[3]{123}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(64 , 125)	(64 , 125)
جذرا المكعبين (a,b)	(4 , 5)	(4 , 5)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(16 , 25)	(16 , 25)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{97+64+125+16+25-(125-97/(97-64+(4+5+1/2)))}{[(4+5)^2/4]+16+25+4+5+1}$	$\frac{123+64+125+16+25-(125-123/(123-64+(4+5+1/2)))}{[(4+5)^2/4]+16+25+4+5+1}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	4.5953	4.9714
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	4.5947	4.9732
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0006	0.0018
مكعب القيمة التقريبية	97.0379	122.8672

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{131}$	$\sqrt[3]{162}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(125 , 216)	(125 , 216)
جذرا المكعبين (a,b)	(5 , 6)	(5 , 6)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(25 , 36)	(25 , 36)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$131+125+216+25+36-(216-131/(131-125+(5+6+1/2)))$ / $[(5+6)^2/4]+25+36+5+6+1$	$162+125+216+25+36-(216-162/(162-125+(5+6+1/2)))$ / $[(5+6)^2/4]+25+36+5+6+1$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	5.1059	5.4635
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	5.0788	5.4514
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0271	0.0121
مكعب القيمة التقريبية	133.1119	163.0846

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{187}$	$\sqrt[3]{214}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(125 , 216)	(125 , 216)
جذرا المكعبين (a,b)	(5 , 6)	(5 , 6)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(25 , 36)	(25 , 36)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{187+125+216+25+36-(216-187/(187-125+(5+6+1/2)))}{[(5+6)^2/4]+25+36+5+6+1}$	$\frac{214+125+216+25+36-(216-214/(214-125+(5+6+1/2)))}{[(5+6)^2/4]+25+36+5+6+1}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	5.7143	5.9804
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	5.7185	5.9814
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0042	0.0010
مكعب القيمة التقريبية	186.5903	213.8901

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{220}$	$\sqrt[3]{279}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	**(216 , 343)**	**(216 , 343)**
جذرا المكعبين (a,b)	**(6 , 7)**	**(6 , 7)**
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	**(36 , 49)**	**(36 , 49)**
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	**220+216+343+36+49-(343-220/(220-216+(6+7+1/2)))** **$[(6+7)^2/4]$+36+49+6+7+1**	**279+216+343+36+49-(343-279/(279-216+(6+7+1/2)))** **$[(6+7)^2/4]$+36+49+6+7+1**
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	**6.0484**	**6.5396**
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	**6.0368**	**6.5343**
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	**0.0116**	**0.0053**
مكعب القيمة التقريبية	**221.2695**	**279.6749**

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{342}$	$\sqrt[3]{350}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(216 , 343)	(343 , 512)
جذرا المكعبين (a,b)	(6 , 7)	(7 , 8)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(36 , 49)	(49 , 64)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	342+216+343+36+49-(343- 342/(342-216+(6+7+1/2))) $[(6+7)^2/4]$+36+49+6+7+1	350+343+512+49+64-(512- 350/(350-343+(7+8+1/2))) $[(7+8)^2/4]$+49+64+7+8+1
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	6.99 29	7.06 59
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	6.993 2	7.047 3
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.000 3	0.018 6
مكعب القيمة التقريبية	341.9 574	352.7 788

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{381}$	$\sqrt[3]{413}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(343 , 512)	(343 , 512)
جذرا المكعبين (a,b)	(7 , 8)	(7 , 8)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(49 , 64)	(49 , 64)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	381+343+512+49+64-(512-381/(381-343+(7+8+1/2))) $[(7+8)^2/4]$+49+64+7+8+1	413+343+512+49+64-(512-413/(413-343+(7+8+1/2))) $[(7+8)^2/4]$+49+64+7+8+1
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	7.2765	7.4580
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	7.2495	7.4470
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0270	0.0110
مكعب القيمة التقريبية	385.2721	414.8271

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{491}$	$\sqrt[3]{511}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(343 , 512)	(343 , 512)
جذرا المكعبين (a,b)	(7 , 8)	(7 , 8)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(49 , 64)	(49 , 64)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	$\frac{491+343+512+49+64-(512-491/(491-343+(7+8+1/2)))}{[(7+8)^2/4]+49+64+7+8+1}$	$\frac{511+343+512+49+64-(512-511/(511-343+(7+8+1/2)))}{[(7+8)^2/4]+49+64+7+8+1}$
القيمة التقريبية الناتجة من طريقة الحصر	7.8858	7.9946
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	7.8891	7.9948
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0033	0.0002
مكعب القيمة التقريبية	490.3851	510.9639

الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{540}$	$\sqrt[3]{721}$
المكعبان الكاملان (a^3,b^3)	(512 , 729)	(512 , 729)
جذرا المكعبين (a,b)	(8 , 9)	(8 , 9)
مربعا جذري المكعبين الكاملين (a^2, b^2)	(64 , 81)	(64 , 81)
التطبيق على العلاقة (*) من طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية	540+512+729+64+81-(729-540/(540-512+(8+9+1/2))) [(8+9)²/4]+64+81+8+9+1	721+512+729+64+81-(729-721/(721-512+(8+9+1/2))) [(8+9)²/4]+64+81+8+9+1
القيمة التقريبية الناتجة	8.1740	8.9658
القيمة الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة	8.1433	8.967
القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية	0.0307	0.0012
مكعب القيمة التقريبية	546.14	720.7209

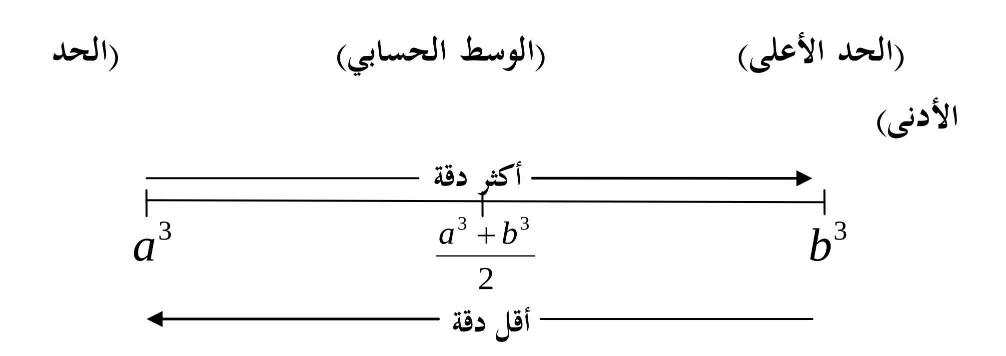
$\sqrt[3]{941}$	(729 , 1000)	(9 , 10)	(81 , 100)	$\frac{941+729+1000+81+100-(1000-941/(941-729+(9+10+1/2)))}{[(9+10)^2/4]+81+100+9+10+1}$	**9.7963**	**9.7993**	**0.0030**	**940.1264**

يتبين لدينا من خلال الجدول (6.1)، **أن طريقة الحصر** (**Restriction Method**) **لتقريب الجذور التكعيبية تعتمد اعتمادا مباشرا على حصر العدد المطلوب تقريب جذره التكعيبي بين مكعبين كاملين متتاليين، وأنها تعطي قيمة قريبة جدا من القيمة الحقيقية لجذر العدد التكعيبي المطلوب تقريبه، حيث أن الخطأ الناتج من استخدام هذه الطريقة يعد قليل جدا.**

ولا بد من التنويه هنا أنه كلما كان العدد المُراد تقريب جذره التكعيبي قريبا من المكعب الأعلى كان التقريب دقيقا وجيدا جدا عند استخدام طريقة الحصر في عملية التقريب، وكلما اقترب ذلك العدد من المكعب الأدنى كان التقريب أقل دقة منه إذا ما قورن بالحالة الأولى، ويوضح الشكل (6.1) **مدى دقة التقريب**

للجذر التكعيبي للعدد x إذا ما استخدمنا طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية في إيجاد قيمة تقريبية له:

الشكل (6.1)



6.3 مقارنة بين التقريبات المتحصلة من بعض الطرق وطريقة الحصر لبعض الجذور التكعيبية

سنقدم الآن مقارنة بسيطة نستعرض فيها استخدام الطرق الأربعة التالية (طريقة نيوتن–رافسون، متسلسلة ذات الحدين، التقريب الخطي والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور) بالإضافة إلى طريقة الحصر وذلك لتقريب بعض الجذور التكعيبية لبعض الأعداد، حيث يبين الجدول (6.2) **مدى فاعلية كل طريقة من الطرق الأربعة آنفة الذكر وفاعلية طريقة الحصر أيضا في تقريب تلك الجذور، مع ملاحظة أننا سوف نستعرض الأمثلة ذاتها التي استعرضناها في**

الجدول (6.1) **باستخدام طريقة الحصر لتقريب الجذور التكعيبية، كما سنقوم أيضا باستعراض التقريبات الأخرى لنفس الأمثلة وذلك بالتطبيق على كل من الطرق الأربعة (أعني باستخدام طريقة نيوتن–رافسون، متسلسلة ذات الحدين، التقريب الخطي والتقريب باستخدام كثير حدود تايلور) مبينا بطبيعة الحال القيمة المطلقة للخطأ بين القيم التقريبية والقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الطرق جميعها.**

ولا بد من ملاحظة أننا سنقوم باعتماد التقريب الرابع على الأكثر للجذر التكعيبي عند استخدام طريقة نيوتن–رافسون، وبأننا سوف نأخذ أول ثلاثة حدود من كثير حدود تايلور عند التطبيق عليه، وسوف نستخدم أول أربعة حدود من متسلسلة ذات الحدين، كما أننا سوف نقوم بتدوير النتائج التي سوف نتوصل إليها إلى أقرب أربع منازل عشرية فقط.

الجدول (6.2)

الجذر التكعيبي لـ x	القيمة الحقيقية	القيمة التقريبية (نيوتن)	القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	القيمة التقريبية (ذات الحدين)	القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)
$\sqrt[3]{2}$	**1.2599**	**1.2599**	**0.0**	**1.284**	**0.0241**	**1.3333**	**0.0734**	**1.2222**	**0.0377**	**1.2727**	**0.0128**

$\sqrt[3]{60}$	$\sqrt[3]{45}$	الجذر التكعيبي لـ ×	$\sqrt[3]{28}$	$\sqrt[3]{22}$	$\sqrt[3]{13}$	$\sqrt[3]{6}$
3.9149	3.5569	القيمة الحقيقية	3.0366	2.8020	2.3513	1.8171
3.9149	3.5569	القيمة التقريبية (نيوتن)	3.0366	2.8020	2.3513	1.8171
0.0	0.0	القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	0.0	0.0	0.0	0.0
3.9149	3.5734	القيمة التقريبية (ذات الحدين)	3.0247	2.8022	2.36	1.8175
0.0	0.0165	القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	0.0119	0.0002	0.0087	0.0004
3.9167	3.6667	القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	3.0370	2.8148	2.4167	1.8333
0.0018	0.1098	القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	0.0004	0.0128	0.0654	0.0162
3.9149	3.5185	القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	3.0366	2.8034	2.3299	1.8194
0.0	0.0384	القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	0.0	0.0014	0.0214	0.0023
3.9087	3.5586	القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	3.04	2.7882	2.37	1.7922
0.0062	0.0017	القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	0.0034	0.0138	0.0187	0.0249

$\sqrt[3]{187}$	$\sqrt[3]{162}$	الجذر التكعيبي لـ ×	$\sqrt[3]{131}$	$\sqrt[3]{123}$	$\sqrt[3]{97}$	$\sqrt[3]{70}$
5.7185	5.4514	القيمة الحقيقية	5.0788	4.9732	4.5947	4.1213
5.7185	5.4514	القيمة التقريبية (نيوتن)	5.0788	4.9732	4.5947	4.1213
0.0	0.0	القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	0.0	0.0	0.0	0.0
5.7186	5.4527	القيمة التقريبية (ذات الحدين)	5.0788	4.9732	4.5953	4.1213
0.0001	0.0013	القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	0.0	0.0	0.0006	0.0
5.7315	5.4933	القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	5.08	4.9733	4.6267	4.125
0.0130	0.0419	القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	0.0012	0.0001	0.0320	0.0037
5.7195	5.4447	القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	5.0787	4.9732	4.5988	4.1211
0.0010	0.0067	القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	0.0001	0.0	0.0041	0.0002
5.7143	5.4635	القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	5.1059	4.9714	4.5953	4.1549
0.0042	0.0121	القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	0.0271	0.0018	0.0006	0.0336

$\sqrt[3]{381}$	$\sqrt[3]{350}$	الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{342}$	$\sqrt[3]{279}$	$\sqrt[3]{220}$	$\sqrt[3]{214}$
7.2495	**7.0473**	القيمة الحقيقية	**6.9932**	**6.5343**	**6.0368**	**5.9814**
7.2495	**7.0473**	القيمة التقريبية (نيوتن)	**6.9932**	**6.5343**	**6.0368**	**5.9814**
0.0	**0.0**	القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**
7.2495	**7.0473**	القيمة التقريبية (ذات الحدين)	**6.9932**	**6.5358**	**6.0368**	**5.9814**
0.0	**0.0**	القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	**0.0**	**0.0015**	**0.0**	**0.0**
7.2585	**7.0476**	القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	**6.9932**	**6.5833**	**6.0370**	**5.9815**
0.0090	**0.0003**	القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	**0.0**	**0.0490**	**0.0002**	**0.0001**
7.249	**7.0473**	القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	**6.9932**	**6.5266**	**6.0368**	**5.9814**
0.0005	**0.0**	القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	**0.0**	**0.0077**	**0.0**	**0.0**
7.2765	**7.0659**	القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	**6.9929**	**6.5396**	**6.0484**	**5.9804**
0.0270	**0.0186**	القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	**0.0003**	**0.0053**	**0.0116**	**0.0010**

$\sqrt[3]{413}$	$\sqrt[3]{491}$	$\sqrt[3]{511}$	$\sqrt[3]{540}$	الجذر التكعيبي لـ x	$\sqrt[3]{721}$	$\sqrt[3]{941}$
7.4470	**7.8891**	**7.9948**	**8.1433**	القيمة الحقيقية	**8.967**	**9.7993**
7.4470	**7.8891**	**7.9948**	**8.1433**	القيمة التقريبية (نيوتن)	**8.967**	**9.7993**
0.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	القيمة المطلقة للخطأ (نيوتن)	**0.0**	**0.0**
7.4475	**7.8891**	**7.9948**	**8.1433**	القيمة التقريبية (ذات الحدين)	**8.967**	**9.7993**
0.0005	**0.0**	**0.0**	**0.0**	القيمة المطلقة للخطأ (ذات الحدين)	**0.0**	**0.0**
7.4762	**7.8906**	**7.9948**	**8.1458**	القيمة التقريبية (التقريب الخطي)	**8.9671**	**9.8033**
0.0292	**0.0015**	**0.0**	**0.0025**	القيمة المطلقة للخطأ (التقريب الخطي)	**0.0001**	**0.0040**
7.4438	**7.8891**	**7.9948**	**8.1432**	القيمة التقريبية (كثير حدود تايلور)	**8.967**	**9.7995**
0.0032	**0.0**	**0.0**	**0.0001**	القيمة المطلقة للخطأ (كثير حدود تايلور)	**0.0**	**0.0002**
7.458	**7.8858**	**7.9946**	**8.174**	القيمة التقريبية (طريقة الحصر)	**8.9658**	**9.7963**
0.0110	**0.0033**	**0.0002**	**0.0307**	القيمة المطلقة للخطأ (طريقة الحصر)	**0.0012**	**0.0030**

مما سبق فإنه يتبين لدينا أن القيم التقريبية المتحصلة من جراء استخدام طريقة نيوتن–رافسون ومتسلسلة ذات الحدين وطريقة التقريب الخطي وطريقة التقريب باستخدام كثير حدود تايلور بالإضافة إلى طريقة الحصر (Restriction Method) هي قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية لتلك الجذور، ذلك أن القيمة المطلقة للخطأ بين القيمة التقريبية الناتجة من استخدام أي منها والقيمة الحقيقية تعد قليلة جدا.

ومن هنا، فإن استخدام أي من الطرق آنفة الذكر يعطي قيما تقريبية جيدة جدا للجذور التكعيبية وقريبة جدا من القيم الحقيقية لها.

ويبقى هنا بعض الملاحظات التي لا بد لي أن أستعرضها من خلال النقاط التالية:

- **طريقة نيوتن–رافسون تعطي قيما دقيقة وصحيحة للجذور التكعيبية.**
- **إن استخدام متسلسلة ذات الحدين تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية.**
- **كما أن استخدام طريقة التقريب الخطي تمكننا من التوصل إلى قيم قريبة نوعا ما من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، ولكن أمر التطبيق على هذه الطريقة يتطلب أن تكون h قيمة صغيرة (بحيث $h \neq 0$) حتى يؤدي التطبيق على هذه الطريقة إلى التوصل إلى قيمة تقريبية تكون أكثر قربا من القيمة الحقيقية للجذر التكعيبي للعدد المطلوب.**
- **إن طريقة التقريب باستخدام كثير حدود تايلور تعطي قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية.**

- **طريقـة الحصـر (Restriction Method) يـؤدي التطبيـق عليهـا إلـى التوصل إلى قيم قريبة نوعا ما من القيم الحقيقية للجذور التكعيبية، مع الأخذ بعين الاعتبار أنه كلما كان العدد المُراد تقريب جذره التكعيبي قريبا من المكعب الأعلى كان التقريب دقيقا وجيدا جدا عند استخدام طريقـة الحصـر فـي عمليـة التقريـب، وكلمـا اقتـرب ذلـك العـدد مـن المكعب الأدنى كان التقريب أقل دقة منه إذا ما قورن بالحالة الأولى، ويوضح ذلك الشكل (6.1) كما أسلفنا سابقا.**

التوصيات

أوصي المتخصصين والقائمين على إعداد المناهج المدرسية في وزارة التربية والتعليم بأخذ طريقة الحصر (Restriction Method) لتقريب الجذور التربيعية ولتقريب الجذور التكعيبية التي تعرضهما هذه الدراسة بعين الاعتبار، وذلك من خلال إدراج الطريقتين في مبحث الرياضيات لأحد الصفين السابع أو الثامن الأساسيين؛ لما تتميزان به من بساطة وسهولة عند التطبيق عليهما، ولكونهما تعطيان قيما قريبة جدا من القيم الحقيقية للجذور التربيعية وللجذور التكعيبية على الترتيب، كما أوصي أيضا بالاستفادة من العلاقات الرياضية التي استعرضتها هذه الدراسة والتي من خلالها يمكن اكتشاف كافة المربعات والمكعبات الكاملة.

المراجع الأجنبية

1. **HOWARD ANTON: CALCULUS. (New York CO., 1995).**
2. **Richard L. Burden and J. Douglas Faires: Numerical Analysis. (Boston Co., 1986).**

3. SALAS and HILLE: CALCULUS. (New York CO., 1995).

المراجع العربية

1. فرانسيس شيد، سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في التحليل العددي، دار ماكجروهيل للنشر، القاهرة، الطبعة الأولى، 1986م.
2. وزارة التربية والتعليم الأردنية، الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي، المديرية العامة للمناهج، عمان، الطبعة الأولى، 1996م.
3. وزارة التربية والتعليم الأردنية، الرياضيات للصف السابع، المديرية العامة للمناهج، عمان، الطبعة الأولى، 2007م.
4. وزارة التربية والتعليم الأردنية، الرياضيات للصف السادس، المديرية العامة للمناهج، عمان، الطبعة الثانية، 1998م.
5. ياسين أحمد الشبول، التقنيات العددية، مكتبة المجتمع العربي للنشر، عمان، الطبعة الأولى، 2004م.